الجامعة	الانبار
الكلية	العلوم
القسم	الفيزياء
المرحلة	الثانية
اسم المادة باللغة العربية	الصوت والحركة الموجية
اسم المادة باللغة الانكليزية	**Sound and Wave motion**
اسم التدريسي	م.م. صباح سلطان فرحان
عنوان المحاضرة باللغة العربية	دالة الموجة ومعادلة الموجة
عنوان المحاضرة باللغة الإنكليزية	**Wave Function and Wave Equation**
رقم المحاضرة	**3**

دالة الموجة ومعادلة الموجة Wave Function and Wave Equation

دالة الموجة تعطي الازاحة كدالة للموقع والزمن

$$y(x,t) = A sin(kx - \omega t)$$

ومعادلة الموجة تصف التغيير في شكل الموجة مع سرعتها، وتحقق المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية التالية:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \ .$$

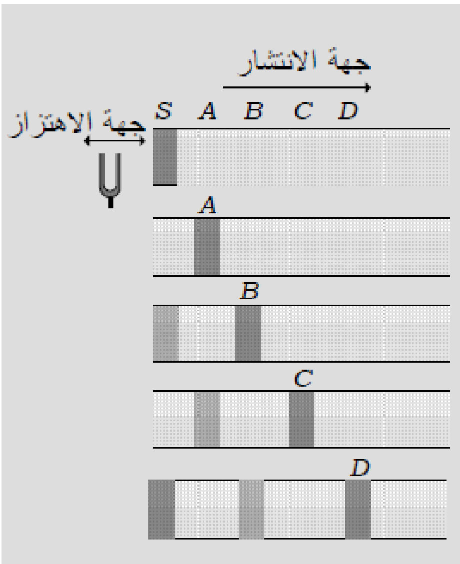
.

معادلة الموجة

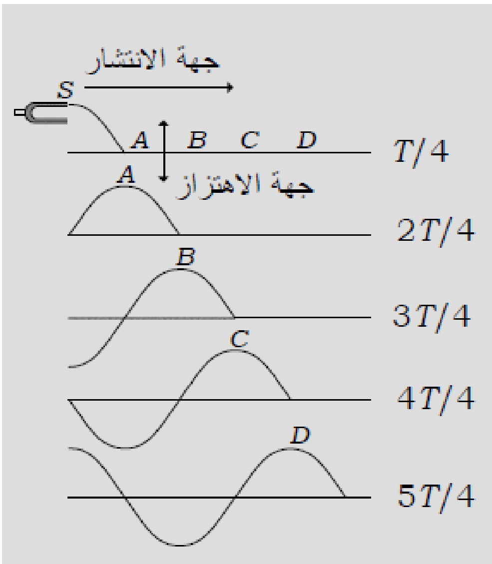
ذكرنا أعلاه أن كل موجة تحتاج لمصدر معين تبدأ منه. فإذا افترضنا أن لدينا حبلا طويلا مشدودا من أحد طرفيه، كما في الشكل (1أ)، وأمسكنا الطرف الآخر منه وبدأنا بهزه للأعلى والأسفل، أو نفخنا في قصبة هوائية وتابعنا حركة ذرت الهواء، كما في الشكل (1ب)، فإننا نلاحظ في كلا الحالتين أن الاهتزازات قد انتشرت من بداية الوسط إلى الأجزاء الأخرى منه خلال فترة زمنية قصيرة. وإذا تابعنا حركة نقاط متتالية منه بدءا من منبع الاهتزازات S مرورا بالنقاط A و B و C، الخ، فإننا نلاحظ مايلي:

1- الحركة الاهتزازية التي بدأت عند S (المنبع) قد انتقلت لبقية نقاط الوسط بالتدريج بحيث تقلد كل واحدة النقطة التي قبلها تماما ولكن متأخرة عنها بزمن يعادل المدة اللازمة للموجة لتصل إليها من هناك. فالنقطة A ستتحرك مثل S في الشكل (1) أو (2) لكن بتأخير زمني يساوي المدة اللازمة لتصل إليها الحركة.

2- كل نقطة من الوسط الذي تنتشر فيه الموجة مثل A و B و C ... الخ، تتحرك حركة اهتزازية بسيطة، مثل المنبع S، ولكل النقاط نفس الطور والتردد والسعة إذا كان الوسط متجانسا (كثافة كتلية ثابتة).



(ب) أمواج طولية



(أ) أمواج مستعرضة

الشكل (1)

ففي الحركة الموجية تهتز نقاط الوسط دون أن تنتقل من مكانها، وكما قال آينشتين فإن الموجة كالإشاعة تبدأ من شخص في مكان ما وتصل بسرعة كبيرة لمكان آخر دون أن يسافر أحد! فما الذي يتنتشر إذا؟ إنها الطاقة التي تنتقل من نقطة لأخرى. وسنقوم فيما يلي بإيجاد المعادلة العامة للموجة وسرعة انتشارها وطولها وغير ذلك من المتغيرات تميز كل موجة.

للحصول على المعادلة التي تصف اهتزازات أي نقطة من وسط تنتشر فيه موجة ما نكتب أولا معادلة الاهتزازات للمنبع S الذي نفترض أنه يهتز بشكل بسيط وفق العلاقة:

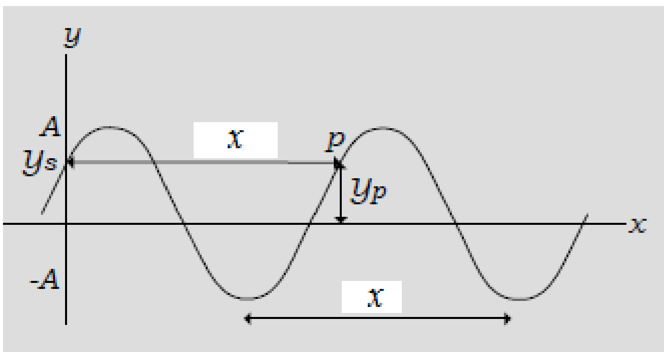
$$y_s = A\sin(\omega t) \qquad 1$$

حيث ترتبط السرعة الزاوية ω و مدة الدورة T وترددها f بالعلاقتين المعروفتين

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad 2$$

ومن ثم نكتب معادلة اهتزازات أي نقطة من الوسط مثل p في الشكل (2)، التي تبعد مسافة x عن المنبع، بملاحظة أنها ستتحرك مثل S تماما، أي حركة اهتزازية بسيطة، لكن متأخرة عنها بزمن يساوي المدة اللازمن للحركة لتصل إليها من هناك، أي أن:

$$y_p = A\sin\omega(t - t')$$



الشكل (2)

فإذا افترضنا أن سرعة انتشار الموجة في الوسط هي v عندئذ يكون الزمن اللازم لها لتنتقل من S إلى p هو:

$$t' = \frac{x}{v} \qquad 4$$

وبتعويض المعادلة 4 في 3 نحصل

$$y_p = A\sin\omega(t - \frac{x}{v}) \qquad 5$$

$$y_p = A\sin(\omega t - \frac{\omega x}{v})$$

ولكن

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$y_p = A\sin(\omega t - \frac{2\pi x}{vT}) \qquad 6$$

ولكن vT هي المسافة التي تقطعها الموجة خلال دور كامل لاهتزازة أي نقطة من الوسط. ونسمي هذه المسافة **طول الموجة** *(wavelength)* ونرمز لها بـ λ ، أي أن:

$$\lambda = vT$$

$$y_p = A\sin(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}) \qquad 7$$

كما نسمي المقدار $2\pi/\lambda$ العدد الموجي *(wave number)* ونرمز له بـ . k، أي أن:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

وتصبح المعادلة 7

$$\boxed{y = A sin(\omega t - kx) \qquad 9}$$

وتسمى العلاقة الأخيرة **المعادلة الموجية** المنتشرة في الوسط، أي أنها تصف حركة أي ذرة منه في أي لحظة من الزمن.

Phase difference فرق الطور

من المعادلة العامة للموجة

$$y = A sin(\omega t - kx) \qquad 1$$

وبما ان

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = kv \quad or \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على:

$$y = A sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \qquad\qquad 2$$

لنفرض الموجتين المتشابهتين التاليتين:

$$y_1 = A sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$y_2 = A sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + \delta\right]$$

$$y_2 = A sin \frac{2\pi}{\lambda}\left[(vt - (x - \frac{\lambda}{2\pi}\delta)\right]$$

$$y_1 = A sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

يلاحظ ان شكل الموجة y_2 هو نفس شكل الموجة y_1 عدا انها ازيحت عنها بمسافة d

$$d = \frac{\lambda}{2\pi}\,\delta$$

حيث δ تدعى بطور phase الموجة y_2 نسبة للموجة y_1 اي فرق الطور , و d تدعى ب (فرق المسار)

اذا كان فرق الطور

$$\delta = 2\pi, 4\pi, \ldots$$

فان

$$d = \lambda,\ \ 2\lambda, ...$$

لذلك فان الموجتين متوافقتين في الطور in phase.

اما اذا كان فرق الطور

$$\delta = \pi, 3\pi, ...$$

$$d = \lambda/2,\ \ 3\lambda/2, ...$$

فان الموجتين متعاكستين في الطور out of phase اي ان $y_1 = -y_2$

مثال -1-

تنتشر موجة مستعرضة في وسط مادي بحيث يهتز المنبع وفق العلاقة : $y_s = 2sin5\pi t\ \ cm$.

(ا) ما السعة العظمى لاهتزاز المنبع وما ترددها وزمن الدورة ؟ (ب) ما طول الموجة والعدد الموجي اذا كانت سرعة انتشار الموجة 30 م/ثا ؟ (ج) ما معادلة الحركة لنقطة تبعد 5 م عن المنبع ؟ (د) ما فرق الطور بين المنبع وهذه النقطة ؟

الحل: (أ) نلاحظ من معادلة اهتزازات المنبع أن السعة العظمى هي $A = 2$ cm ، والسرعة الزاوية $\omega = 5\pi$ rad/s لذا يكون التردد:

$$y_s = A\sin\omega t$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2.5\ \text{Hz}$$

وزمن الدورة

$$T = \frac{1}{f} = 0.4 \text{ s}$$

(ب) الطول الموجي والعدد الموجي

$$\lambda = vT = 30 \times 0.4 = 12\, m$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{12} = 0.52\, m^{-1}$$

(ج) نكتب معادلة اهتزازات النقطة المعتبرة بالشكل:

$$y = Asin(\omega t - kx) = 2\sin(5\pi t - 0.52 \times 5)$$

$$y = 2\sin(5\pi t - 2.6)$$

(د) نلاحظ من معادلة المنبع والنقطة المعتبرة أن فرق الطور بينهما هو $\Delta\phi = 2.6 \text{ rad}$

مثال – 2 -

مررت موجة ذات تردد 300 هيرتز خلال لوح من الحديد ثم من نهاية اللوح تخرج الى الهواء. اذا كانت سرعة الموجة في الحديد 4800 متر بالثانية وسرعتها في الهواء 330 متر بالثانية. جدي الطول الموجي للموجة في كلا الوسطين.

الحل

تردد الموجة يبقى ثابتا خلال مرور الموجة من وسط لاخر, وعليه

الطول الموجي في الحديد

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{4800}{300} = 16\, m$$

في الهواء

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{300} = 1.1\ m$$

مثال – 3-

انشا اضطراب توافقي عرضي في وتر. وكانت السرعة الافقية القصوى للاضطراب (3 م/ثا) وتعجيله الاعظم (90 م/ثا^2). فاذا كانت سرعة انتشار الموجة (20 م/ثا) جدي معادلة الموجة.

الحل

لتكن معادلة الموجة بالشكل التالي

$$y = A\sin(\omega t \mp kx + \phi)$$

حيث ϕ هي زاوية الطور phase angle

وبما ان السرعة الافقية العظمى هي

$$v_{max} = \omega A$$

والنعجيل الافقي الاعظم هو

$$a_{max} = \omega^2 A$$

وعليه

$$\frac{\omega^2 A}{\omega A} = \omega = \frac{90}{3} = 30 \text{ rad s}^{-1}$$

وبما ان

$$\omega A = 3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3}{\omega} = \frac{3}{30} = 0.1\, m$$

سرعة انتشار الموجة (سرعة الموجة)

$$v = \frac{\omega}{k} = 20 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2} \ m^{-1}$$

لذلك فان معادلة جبهة الموجة هي:

$$y = 0.1 \sin \left(30t \pm \frac{3}{2}x + \phi\right).$$

موجة جيبية تسير بالاتجاه الموجب لمحور السينات في وتر مشدود, سعتها (2.0 سم) , طولها الموجي (1 م) وسرعتها (5 متر بالثانية). الشروط الابتدائية هي: $y = 0$ عند $x = 0$ و $t = 0$. جدي دالة الموجة $y = f(x,t)$.

الحل

$$y = A\sin(\omega t - kx + \delta)$$

$$y = A\sin\left[k\left(\frac{\omega}{k}t - x\right) + \delta\right]$$

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \rightarrow \quad \omega = kv$$

$$y = Asin[kvt - k\,x) + \ \delta]$$

$$y = Asin[k(vt - \ x) + \ \delta]$$

$$y = Asin[k(vt - \ x) + \ \delta]$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y = Asin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - \ x) + \ \delta\right]$$

$$v = 5\frac{m}{s}, \quad \lambda = 1.0\,m\,, A = 2\,cm = 0.02\,m$$

$$y = 0.02sin[2\pi(5t - x) + \ \delta]$$

$$t = 0, x = 0\ and\ \ y = 0$$

$$0.02sin[0 - 0) + \ \delta] = \ \ 0$$

$$sin\delta = \ \ 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0$$

$$y = 0.02sin[2\pi(5t - x)]$$