الكلية	العلوم
القسم	الجيولوجي
المادة باللغة الانجليزية	Mathematics
المادة باللغة العربية	الرياضيات
المرحلة الدراسية	الأولى
اسم التدريسي	عمر محمد فخري
عنوان المحاضرة باللغة الانجليزية	**Area between curves - part 1**
عنوان المحاضرة باللغة العربية	المساحة بين المنحنيات - الجزء الأول
رقم المحاضرة	6
المصادر والمراجع	Thomas GB, Finney RL, Weir MD, Giordano FR. Thomas' calculus. Reading: Addison-Wesley; 2003.

« إيجاد مساحة المنطقة المستوية »

* المساحة بين منحني ومحور (X) [بدون فترة]
تكون طريقة الحل كالتالي :

I. نساوي الدالة بالصفر $f(x)=0$ ، ثم نجد قيمة x

II. نثبت (X) على خط الاعداد   اصغر قيمة $\longleftarrow A_1 \quad A_2 \longrightarrow$ اكبر قيمة

III. نكامل الدالة مباشرة $A = |A_1| + |A_2|$ ← التكاملية

① أوجد المساحة المحددة بالدالة $\left(f(x) = x^4 - x^2\right)$ ومحور (X).

$$f(x)=0 = x^4 - x^2 \longrightarrow x^2(x^2-1)=0$$

اما $x^2 = 0 \longrightarrow \boxed{x=0}$

او $x^2 - 1 = 0 \longrightarrow \boxed{x=\pm 1}$

$\int_{-1}^{0} f(x)$ $\int_{0}^{1} f(x)$

$-1 \quad A_1 \quad 0 \quad A_2 \quad 1$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \left[0 - \left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right] \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{-2}{15}}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} (x^4 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\left(\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^3}{3}\right) - 0\right] \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{-2}{15}}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{-2}{15}\right| + \left|\frac{-2}{15}\right|$$

$$A = 4/15 \quad \text{unit}^2$$

2 أوجد المساحة المحددة بالدالة $\left(F(X) = X^3 - 3X^2 + 2X\right)$ ومحور (X) ؟

$$f(x) = 0 = x^3 - 3x^2 + 2x .$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \rightarrow x(x-1)(x-2) = 0$$

اما $\boxed{x=0}$

او $x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1}$

او $x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2}$

$\int_0^1 f(x)$ $\int_1^2 f(x)$

0 A_1 1 A_2 2

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \left[\left(\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + (1)^2\right) - 0\right]$$

$\therefore \boxed{A_1 = \frac{1}{4}}$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{(2)^4}{4} - (2)^3 - (2)^2\right) - \left(\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + (1)^2\right)$$

$\therefore \boxed{A_2 = \frac{-1}{4}}$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

* المساحة بين منحني ومحور (X) للفترة [a , b] .

- من الممكن أن يعطى مستقيمين $X_1 = a$, $X_2 = b$ ...

تحل بالطريقة التالية :-

I . نساوي $f(x)$ بالصفر ونجد قيمة (X) .

II . فيما كانت قيمة X لا تنتمي للفترة [a , b] تهمل .

اذا كانت تنتمي للفترة توزع على خط الاعداد .

III . نجري عملية التكامل

③ أوجد مساحة المنطقة التي يحدها منحني الدالة $(y = x^2)$

والمستقيمان $(X = 1)$ و $(X = 3)$.

المستقيمان يمثلان الفترة [1 , 3] .

$f(x) = y = x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ ($\notin$ للفترة [1,3])

$$A = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] = 26/3$$

$$A = \left|\frac{26}{3}\right| = \frac{26}{3} \text{ unit}^2$$

④ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة ($f(x)=x^2-1$) ومحور (X) للفترة $[-2,3]$.

$$f(x) = x^2 - 1 = 0 \longrightarrow \boxed{x = \pm 1} \in \text{للفترة}$$

$$\int_{-2}^{-1} f(x) \qquad \int_{-1}^{1} f(x) \qquad \int_{1}^{3} f(x)$$

$-2 \quad A_1 \quad -1 \quad A_2 \quad 1 \quad A_3 \quad 3$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = \boxed{\frac{-4}{3}}$$

$$A_3 = \int_{1}^{3} (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3} = \boxed{\frac{20}{3}}$$

$$\underset{(\text{الكلي})}{A} = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$= \left|\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{-4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right|$$

$$A = \frac{28}{3} \text{ unit}^2$$

University of Anbar
Science College
Geology Department

واجب

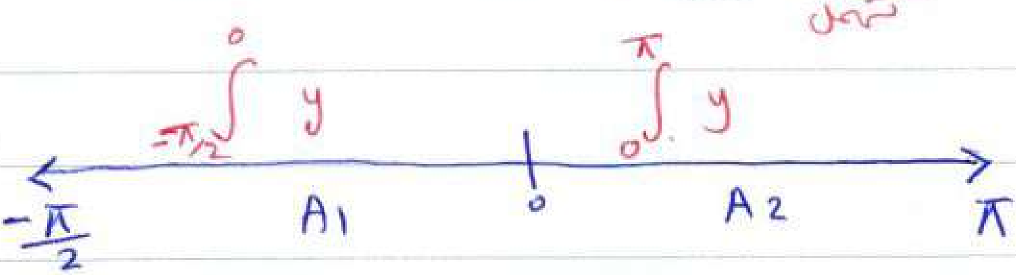
A- جد المساحة المحددة بالدالة ($f(x)=x^3-4x$) ومحور (x) للفترة $[-2,2]$.

B- جد المساحة المحددة بالدالة ($y=x^4-x$) ومحور (x) والمستقيمين ($x=1$) ، ($x=-1$) .

(5) أوجد المساحة المحددة بمنحني الدالة ($y=\sin x$) ومحور (x) للفترة $\left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$.

$y = \sin x = 0$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 0 \checkmark \\ \pi \checkmark \ , \ \underbrace{-\pi}_{\text{تهمل}} \\ \underbrace{2\pi}_{} \ , \ \underbrace{-2\pi}_{\text{تهمل}} \end{cases}$$



$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \left[\overset{\text{الاعلى}}{-\cos 0} - \overset{\text{ادنى}}{\left(-\cos \frac{-\pi}{2}\right)}\right]$$

$A_1 = -1$

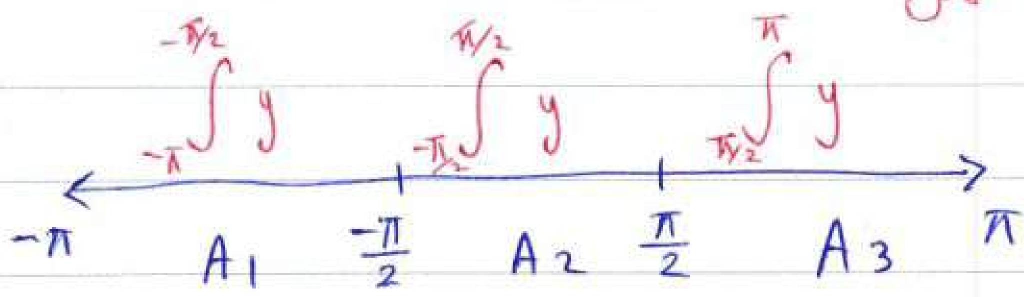
$$A_2 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = \Big[\overset{\text{اعلى}}{-\cos\pi} - \overset{\text{ادنى}}{(-\cos 0)} \Big]$$

$$\boxed{A_2 = 2} \Rightarrow A = |A_1| + |A_2| = |-1| + |2|$$

(الحل) $A = 3 \text{ unit}^2$

⑥ أوجد المساحة المحددة بمنحني الدالة $(y = \cos x)$ ومحور (x) للفترة من $[-\pi , \pi]$.

$$y = \cos x = 0 \rightarrow x = \left\{ \begin{matrix} \frac{\pi}{2} , & \frac{-\pi}{2} \\ \underbrace{\frac{3\pi}{2} , \frac{-3\pi}{2}}_{\text{تهمل}} \end{matrix} \right\}$$



$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_{-\pi}^{-\pi/2} = -1$$

$$A_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$$

$$A_3 = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_{\pi/2}^{\pi} = -1$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = |-1| + |2| + |-1| = 4 \text{ unit}^2$$

(7) أوجد المساحة المحددة بمنحني الدالة $(y = \sin 3x)$ ومحور (x) للفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$y = \sin 3x = 0$$

$$3x = 0 \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{matrix} \right\} \therefore x = 0 \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{matrix} \right\}$$

تهمل

$$\int_0^{\pi/3} y \qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2} y$$

$$0 \quad A_1 \quad \frac{\pi}{3} \quad A_2 \quad \frac{\pi}{2}$$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \, dx = \left[\frac{-1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}$$

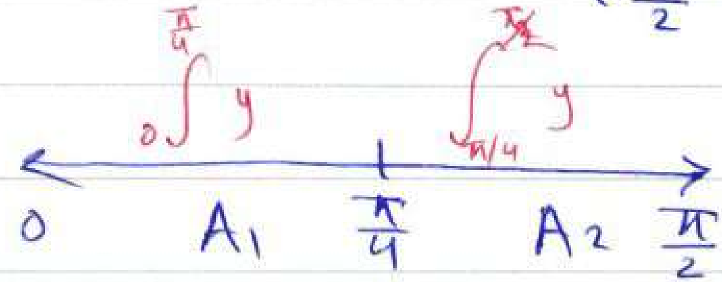
$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \, dx = \left[\frac{-1}{3} \cos 3x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right| = 1 \ \text{unit}^2$$

(8) أوجد المساحة المحددة بمنحني الدالة $(y = 2\cos^2 x - 1)$ و محور (x) للفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$y = 2\cos^2 x - 1 = 0 \qquad \because 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

$\therefore \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} \end{array} \right\}$ تهمل



$$A_1 = \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{-1}{2}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| = 1 \quad unit^2$$

** المساحة المحددة بمنحنيين او منحني دالتين

$f(x) = \text{------}$ دالة (1)

$g(x) = \text{-----}$ دالة (2)

لايجاد المساحة بين الدالتين نتبع التالي :

I. $f(x) = g(x) \rightarrow \boxed{f(x) - g(x) = 0} \rightarrow$ دالة (3)

II. ايجاد قيمة (x) من دالة (3) .

III. إجراء عملية التكامل للدالة (3) . مع الاخذ بنظر الاعتبار ترتيب الدالة .