الكلية	العلوم
القسم	الجيولوجي
المادة باللغة الانجليزية	Mathematics
المادة باللغة العربية	الرياضيات
المرحلة الدراسية	الأولى
اسم التدريسي	عمر محمد فخري
عنوان المحاضرة باللغة الانجليزية	Natural Logarithm
عنوان المحاضرة باللغة العربية	اللوغاريتم الطبيعي
رقم المحاضرة	5
المصادر والمراجع	Thomas GB, Finney RL, Weir MD, Giordano FR. Thomas' calculus. Reading: Addison-Wesley; 2003.

Natural Logarithm (ln) اللوغارتم الطبيعي

$$y = \ln f(x) \; ; \; \bar{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ مشتقة الدالة / نفس الدالة

$\Rightarrow y = \ln 3x^2+5 \; ; \; \bar{y} = \frac{6x}{3x^2+5}$

$\Rightarrow y = \ln 3x \; ; \; \bar{y} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y = \ln(2-\cos x) \; ; \; \bar{y} = \frac{\sin x}{2-\cos x}$

$\Rightarrow y = \ln \tan^2 x \; ; \; \bar{y} = \frac{2(\tan x) \cdot \sec^2 x}{\tan^2 x} = \frac{2\sec^2 x}{\tan x}$

$\Rightarrow y = (\ln x)^2 ; \; \bar{y} = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y = x^2 \cdot \ln x \; ; \; \bar{y} = x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + \ln x \cdot (2x) = x + 2x \ln x$

$\Rightarrow y = \ln (\frac{1}{x})^3 ; \; y = \ln x^{-3} \rightarrow \bar{y} = \frac{-3x^{-4}}{x^{-3}} = \frac{-3}{x}$

University of Anbar
Science College
Geology Department

اشتقاق (e)

$$y = e^{f(x)} \rightarrow \bar{y} = \bar{f}(x) \cdot e^{f(x)} \qquad \bar{y} = \frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow y = e^{3x^2+5} \; ; \; \bar{y} = 6x \cdot e^{3x^2+5}$

$\Rightarrow y = e^{\tan x} \; ; \; \bar{y} = \sec^2 x \cdot e^{\tan x}$

$\Rightarrow y = x^2 \cdot e^x$ " ضرب دالتين "

$\bar{y} = x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x = e^x (x^2 + 2x)$

$\Rightarrow y = e^{x^2} \cdot \ln 2x$

$\bar{y} = e^{x^2} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x} + \ln 2x \cdot (2x)\, e^{x^2}$

$\bar{y} = \frac{e^{x^2}}{x} + 2x \cdot \ln 2x \cdot e^{x^2}$

$$\Rightarrow y = \cos(e^{\pi x})$$

مشتق زاوية

$$\bar{y} = -\sin(e^{\pi x}) \cdot \pi e^{\pi x} = -\pi e^{\pi x} \cdot \sin e^{\pi x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$ قسمة دالتين

$$\bar{y} = \frac{(e^{x} - e^{-x}) \cdot (e^{x} - e^{-x}) - (e^{x} + e^{-x}) \cdot (e^{x} + e^{-x})}{(e^{x} - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x} - (e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x})}{(e^{x} - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} - 2 - \cancel{e^{-2x}}}{(e^{x} - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{-4}{(e^{x} - e^{-x})^2}$$

اشتقاق الدالة الأسية:

$$y = a^{u}$$

$$\frac{da^{u}}{dx} = a^{u} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \ln a$$

نفس الدالة ، مشتقة الأس ، الأساس

$\Rightarrow y = 3^{2x-5}$; $\bar{y} = 3^{2x-5} \cdot (2) \cdot \ln 3$

$\Rightarrow y = 2^{-x^{2}}$; $\frac{dy}{dx} = -2x \cdot \ln 2 \cdot 2^{-x^{2}}$

$\Rightarrow y = 5^{\sin x}$; $\frac{dy}{dx} = 5^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 5$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \ln 5 \cdot 5^{\sin x}$$

$\Rightarrow y = 9^{\sqrt{x}}$; $\frac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln 9$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} \cdot \ln 9 \cdot 9^{\sqrt{x}}$$

تكامل $e^{f(x)}$:-

$$\boxed{\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = e^{f(x)} + c}$$

ملاحظة: قبل إجراء عملية التكامل لـ ($e^{f(x)}$) يجب ملاحظة الاس،
هل المشتقة للأس متوفرة ام من الممكن توفيرها.

$$\Rightarrow \int x \cdot e^{x^2} dx$$

مشتقة الاس = $2x$

$$\frac{1}{2}\int 2x \cdot e^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\Rightarrow \int \sec^2 3x \cdot e^{\tan 3x} dx$$

مشتقة الاس = $3\sec^2 3x$

$$\frac{1}{3}\int 3\sec^2 3x \cdot e^{\tan 3x} dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{\tan 3x} + c$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

مشتقة الأس = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}}$$

$$= e^2 - e$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin x\,dx$$

مشتقة الأس = $-\sin x$

$$- \int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot (-)\sin x\,dx$$

$$= -\left[e^{\cos x}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\left[e^{\cos \pi/2} - e^{\cos 0}\right] = -\left[e^0 - e^1\right]$$

$$= -1 + e$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\Rightarrow \int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\, dx$$

مشتقة الاس = 2

$$\frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} 2e^{2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{\ln 3}^{\ln 5} = \frac{1}{2}\left[e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{\ln 5^2} - e^{\ln 3^2}\right] = \frac{1}{2}\left[25 - 9\right] = 8$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\ln 2} e^{-x}\, dx$$

مشتقة الاس = -1

$$-\int_{0}^{\ln 2} -e^{-x}\, dx$$

$$= -\left[e^{-x}\right]_{0}^{\ln 2} = -\left[e^{-\ln 2} - e^{0}\right] = -\left[e^{\ln 2^{-1}} - e^{0}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{1}{2}$$

University of Anbar
Science College
Geology Department

$$\Rightarrow \int_1^2 x \cdot e^{-\ln x}\, dx$$

$$\int_1^2 x \cdot e^{\ln x^{-1}}\, dx \longrightarrow \int_1^2 \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx \rightarrow \int_1^2 dx$$

$$= [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1 + e^x)^2 \cdot e^x\, dx$$

$e^x =$ م.د.ن

$$= \left[\frac{1}{3}(1 + e^x)^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1 + e^1)^3 - (1 + e^0)^3\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1 + e)^3 - 8\right]$$

$$\text{or} = \frac{(1 + e)^3}{3} - \frac{8}{3}$$

التكامل باستخدام (ln)

* الشروط الواجب توفرها لاستخدام قاعدة (ln)

I - أن يكون السؤال المعطى مكون من بسط ومقام (البسط = مشتقة المقام)

II - يكون اس البسط اقل بمقدار (1) من اس المقام.

III - القوس الموجود في المقام والمرفوع الى الاس (1) لا يتم رفعه الى البسط ولكن نجري عملية التكامل بأستخدام (ln) كالتالي:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

* تنطبق القاعدة اعلاه على التكامل المحدد ايضاً

University of Anbar
Science College
Geology Department

$$\Rightarrow \int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$$

مشتقة المقام = $2x$ = البسط

$$= \Big[\ln|x^2+9|\Big]_0^4 = \Big[\ln|4^2+9| - \ln|0^2+9|\Big]$$

$$= \ln 25 - \ln 9 = \ln 25/9$$

$$\Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx$$

مشتقة المقام = 1

$$= \Big[\ln|x+1|\Big]_0^3 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx$$

مشتقة المقام = $3x^2+4$

$$= \Big[\ln|x^3+4x+1|\Big]_0^1$$

$$= \ln 6 - \ln 1 = \ln 6$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\, dx$$

مشتقة المقام = $\sec^2 x$

$$= \Big[\ln|2+\tan x|\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

صراعلى $\frac{\pi}{4}$ صرادنى $-\frac{\pi}{4}$

$$= \ln|\underbrace{2+\tan\tfrac{\pi}{4}}_{2+1}| - \ln|\underbrace{2+\tan -\tfrac{\pi}{4}}_{2-1}|$$

$$= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

* بخصوص تكامل كل من $\tan x$ ، $\cot x$
يجب استخدام القوانين التالية

$$\tan x = \sin / \cos x$$

$$\cot x = \cos x / \sin x$$

وعليه يكون

$$\int \cot x \, dx$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx \qquad \text{مشتقة المقام} = \cos x$$

$$\therefore \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

وكذلك بالنسبة لـ

$$\int \tan x \, dx$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx \qquad \text{مشتقة المقام} = -\sin x$$

$$-\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

$$\therefore \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\Rightarrow \int \cot^3 5x \, dx$$

$$\int \cot^2 5x \cdot \cot 5x \, dx$$ « تجزئة الاس »

$$\int (\csc^2 5x - 1) \cdot \cot 5x \, dx$$ « استخدام العلاقة »

$$\int \cot 5x \cdot \csc^2 5x \, dx - \int \cot 5x \, dx$$ توزيع تكامل + اقواس

م . د . م $= -5\csc^2 5x$

$$\frac{-1}{5}\int (\cot 5x) \cdot (-5)\csc 5x \, dx - \frac{1}{5}\int \frac{5\cos 5x}{\sin 5x} \, dx$$

قوس مرفوع الى اس

مشتقة المقام $= -5\cos 5x$

$$= \frac{-1}{10}(\cot 5x)^2 - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + C$$

① $\int \tan^3 x \, dx$

② $\int \tan^3 6x \, dx$

واجب