الكلية	**العلوم**
القسم	**الجيولوجي**
المادة باللغة الانجليزية	Mathematics
المادة باللغة العربية	**الرياضيات**
المرحلة الدراسية	**الأولى**
اسم التدريسي	**عمر محمد فخري**
عنوان المحاضرة باللغة الانجليزية	Integration of trigonometric functions - part 2
عنوان المحاضرة باللغة العربية	**تكامل الدوال المثلثية ـ الجزء الثاني**
رقم المحاضرة	4
المصادر والمراجع	Thomas GB, Finney RL, Weir MD, Giordano FR. Thomas' calculus. Reading: Addison-Wesley; 2003.

جامعة الانبار
1987 1428
UNIVERSITY OF ANBAR

* في حالة $\sin^3 x$ ، $\cos^3 x$

① نجزء الاس ( )^2( )

② نستخدم القانون

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

③ في حال كان:

I. لدينا مقام تحلل (فرق بين مربعين)

II. لا يوجد مقام نتخلص من الاقواس بالتوزيع

④ نجري عملية التكامل

$\Rightarrow \int \sin^3 x \, dx$

$\int \sin^2 x \sin x \, dx$

$\int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$

$\int \sin x \frac{dx}{1} - \int \sin x \cos^2 x \, dx$

$\int \sin x \, dx - (-1) \int -\sin x (\cos x)^2 \, dx$

$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$

$\Rightarrow \int \cos^3 x \, dx$

$\int \cos^2 x \cos x \, dx$

$\int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$

$\int \cos x \, dx - \int \cos x \sin^2 x \, dx$

$\int \cos x \, dx - \int \cos x \cdot (\sin x)^2 \, dx$

$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c$

$\Rightarrow \int \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} \, dx$

$\int \frac{\cos^2 x \cos x}{1 - \sin x} \, dx \longrightarrow \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{1 - \sin x} \, dx$

$\int \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x) \cos x}{(1 - \sin x)} \, dx \longrightarrow \int (1 + \sin x) \cos x \, dx$

$\int \cos x \, dx + \int (\sin x)' \cos x \, dx$

$= \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x + c$

* في حالة $\cos^4 x$ ، $\sin^4 x$

1) نجزء الاس ( )^2( )^2

2) نستخدم القانون $\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

تذكر
هذا القانون يضاعف الزاوية

3) توزيع الاقواس

4) توزيع التكامل على جميع الحدود . (مع توفير مساحة داخل القوس)

5) نجري عملية التكامل

$\Rightarrow \int \sin^4 x\, dx$

$\int \sin^2 x \sin^2 x\, dx \longrightarrow \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)dx$

$\int (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x)\, dx$

$\int (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x)\, dx$ $\longrightarrow (\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x)$

$\int (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x)\, dx$

$\frac{3}{8}\int 1\, dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\int 4\cos 4x\, dx$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

* تكامل الدوال بمختلف الزوايا :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x & \text{« تخلي واضعاف »} \\ 2\cos^2 x - 1 & \text{« وجود sin »} \\ 1 - 2\sin^2 x & \text{« وجود cos »} \end{cases}$$

* تستخدم العلاقات اعلاه لتوحيد زوايا السؤال قبل اجراء عملية التكامل .

$$\Rightarrow \int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx$$

$$\int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx \longrightarrow \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{(\cos 2x - \sin 2x)}\, dx$$

$$\int (\cos 2x + \sin 2x)\, dx \longrightarrow \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{2}\int 2\sin 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

$\Rightarrow \int \cos^2 2x \sin x \, dx$

$\int (2\cos^2 x - 1)^2 \sin x \, dx \longrightarrow \int (4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) \sin x \, dx$

$\int 4\cos^4 x \sin x \, dx - 4 \int \cos^2 x \sin x \, dx + \int \sin x \, dx$

$= \frac{4}{5}\cos^5 x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

$\Rightarrow \int \sin 6x \cos^2 3x \, dx$

$\int \sin 6x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x\right) dx$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\int 6 \sin 6x \, dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\int 6 (\sin 6x)' \cos 6x \, dx$

$= \frac{-1}{12}\cos 6x + \frac{1}{24}\sin^2 6x + C$

* ويمكن حلها بطريقة اخرى ($\sin 6x = 2\sin 3x \cos 3x$)

$$\int (2\sin 3x \cdot \cos 3x)\cos^2 3x \, dx$$

$$-2\cdot\frac{1}{3}\int -3\sin 3x \cos^3 3x \, dx$$

$$= -\frac{1}{6}\cos^4 3x + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx$$

$$\int \cos x (\sin x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin^2 x} + C$$

$$\Rightarrow \int \tan 3x \sec^5 3x \, dx$$

$$\int \tan 3x \cdot \sec 3x (\sec 3x)^4 dx$$

$3\sec 3x \cdot \tan 3x$ = p.s.f

$$\frac{1}{3}\int 3\tan 3x \sec 3x (\sec 3x)^4 dx$$

$$= \frac{1}{15}\sec^5 3x + C$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$$

$$\int \sqrt{\sin^2 x + \cos 2x - \sin 2x}\, dx$$

قانون

$$\int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}\, dx$$

تحليل

$$\int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx \rightarrow \int \pm (\sin x - \cos x)\, dx$$

$$= \mp (\cos x + \sin x) + C$$

$$\Rightarrow \int \cot x \csc^3 x\, dx$$

$$-\int -\cot x \csc x (\csc x)^2\, dx$$

$$= \frac{-1}{3} \csc^3 x + C$$

University of Anbar
Science College
Geology Department

Mathematics
Lecture No
Quiz-2

Q1/ $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$ 2-3 p

Q2/ $\int \frac{(4-\sqrt{7x})^6}{\sqrt{3x}}\,dx$

$\frac{-\sqrt{7}}{2\sqrt{x}}$ = n.s.p

$\int \frac{(4-\sqrt{7x})^6}{\sqrt{3}\sqrt{x}}\,dx \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-2}{\sqrt{7}}\int -\sqrt{7}\frac{(4-\sqrt{7}\sqrt{x})^6}{2\sqrt{x}}\,dx$

$= \frac{-2}{\sqrt{21}}\cdot\frac{(4-\sqrt{7x})^7}{7}+c = \frac{-2}{7\sqrt{21}}(4-\sqrt{7x})^7+c$

Q3/ $\int_0^{\frac{1}{2}} x^4\left(\frac{1}{x}+2\right)^4 dx$

2 = n.s.p

$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x\left(\frac{1}{x}+2\right)\right)^4 dx \rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} 2(1+2x)^4\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\cdot(1+2x)^5\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}\left[(1+2x)^5\right]_0^{1/2}$

$= \frac{1}{10}\left[(1+2(\frac{1}{2}))^5-(1+2(0))^5\right]$

$= 31/10$