الكلية	**العلوم**
القسم	**الجيولوجي**
المادة باللغة الانجليزية	Mathematics
المادة باللغة العربية	**الرياضيات**
المرحلة الدراسية	**الأولى**
اسم التدريسي	**عمر محمد فخري**
عنوان المحاضرة باللغة الانجليزية	Integration of trigonometric functions - part 1
عنوان المحاضرة باللغة العربية	**تكامل الدوال المثلثية ـ الجزء الأول**
رقم المحاضرة	3
المصادر والمراجع	Thomas GB, Finney RL, Weir MD, Giordano FR. Thomas' calculus. Reading: Addison-Wesley; 2003.

UNIVERSITY OF ANBAR

« Integration of trigonometric functions »
« تكامل الدوال المثلثية »

* قوانين التكامل

① $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

② $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

③ $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

④ $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

⑤ $\int \sec x \cdot \tan x \, dx = \sec x + c$

⑥ $\int \csc x \cdot \cot x \, dx = -\csc x + c$

يجب الاخذ بالاعتبار توفير مشتقة الزاوية

للتذكير

① $y = \sin x \longrightarrow \bar{y} = \cos x$

② $y = \cos x \longrightarrow \bar{y} = -\sin x$

③ $y = \tan x \longrightarrow \bar{y} = \sec^2 x$

④ $y = \cot x \longrightarrow \bar{y} = -\csc^2 x$

⑤ $y = \sec x \longrightarrow \bar{y} = \sec x \cdot \tan x$

⑥ $y = \csc x \longrightarrow \bar{y} = -\csc x \cdot \cot x$

* تكون مسائل تكامل الدوال المثلثية على عدة اشكال :

A- تكامل مباشر (باستعمال القوانين مباشرة) .

B- تكامل عن طريق تجميع الدالة ومشتقها . تحاول معاملة قوس مرفوع الى + س (مع ضمان توفر مشتقة داخل القوس) .

C- تكامل يحتاج الى تعديل عن طريق العلاقات المثلثية للوصول الى حالة يمكن حلها كما في (A) و (B) .

D- تكامل الدوال المثلثية التربيعية او اعلى .

$\Rightarrow \int \cos 5x \, dx$ (A)

مشتقة الزاوية = 5

$\frac{1}{5}\int 5\cos 5x \, dx = \frac{1}{5}\sin 5x + C$

$\Rightarrow \int x^2 \sin x^3 \, dx$ (A)

$\frac{1}{3}\int 3x^2 \sin x^3 \, dx$ $3x^2$ = مشتقة الزاوية

$= \frac{-1}{3}\cos x^3 + C$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$ (A)

مشتقة الزاوية $= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx$$

$$= 2\sin\sqrt{x} + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/3} \sec x \cdot \tan x\,dx$$ (A)

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$= \left[\sec x\right]_0^{\pi/3} = \left[\sec\frac{\pi}{3} - \sec 0\right] = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \int \sin^4 x \cos x\,dx$$ (B)

$$\int (\sin x)^4 \cos x\,dx$$

راجع جدول المشتقة

مشتقة داخل القوس $= \cos x$

$$= \frac{(\sin x)^5}{5} + C$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

$\Rightarrow \int \tan^6 x \sec^2 x \, dx$ (B)

$\int (\tan x)^6 \sec^2 x \, dx$

مشتقة داخل القوس $\sec^2 x$

$= \frac{1}{7} \tan^7 x + C$

$\Rightarrow \int \cos^3 3x \cdot \sin 3x \, dx$ (B)

$\int (\cos 3x)^3 \sin 3x \, dx$

$\frac{-1}{3} \int (\cos 3x)^3 (-3\sin 3x) \, dx$ $-3\sin 3x$ = مشتقة داخل القوس

$= \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{4} (\cos 3x)^4 + C = \frac{-1}{12} \cos^4 3x + C$

$\Rightarrow \int \sqrt{\cot x} \cdot \csc^2 x \, dx$ (B)

$\int (\cot x)^{\frac{1}{2}} \csc^2 x \, dx$

$-\int (\cot x)^{\frac{1}{2}} (-\csc^2 x) \, dx$ $-\csc^2 x$ = مشتقة داخل القوس

$= -(\cot x)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} + C$

$= \frac{-2}{3} \sqrt{\cot^3 x} + C$

$\Rightarrow \int \sqrt{\sin 2x} \cdot \cos 2x \, dx$ (B)

$\int (\sin 2x)^{\frac{1}{2}} \cos 2x \, dx$

$\frac{1}{2}\int (\sin 2x)^{\frac{1}{2}} 2\cos 2x \, dx$ $2\cos 2x$ = م.ن.ك

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (\sin 2x)^{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{\sin^3 2x}$

* بعض العلاقات الواجب حفظها

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

② $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

③ $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

④ $\tan x = \sin x / \cos x = \frac{1}{\cot x}$

$\cot x = \cos x / \sin x = \frac{1}{\tan x}$

⑤ $\sec x = 1/\cos x$

⑥ $\csc x = 1/\sin x$

$$\Rightarrow \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\,dx \qquad (e)$$

$\sec^2 x$ ناخذ

$$\int \frac{\sec^2 x}{(\tan x)^3}\,dx \longrightarrow \int \sec^2 x\,(\tan x)^{-3}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}(\tan x)^{-2} + c = \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}\,dx \qquad (c)$$

$$\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \csc^2 2x\,dx \quad \left\{1-\cos^2 2x = \sin^2 2x,\ \sec^2 2x = \frac{1}{\sin^2 2x}\right\}$$

$$\frac{-1}{2}\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}(-2\csc^2 2x)\,dx \qquad -2\csc^2 2x$$ ناخذ

$$= \frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(\cot 2x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{-1}{3}\sqrt{\cot^3 2x} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$\int (\tan x)' \sec^2 x\, dx \qquad \left(\because \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$\sec^2 x$ مشتقة داخل القوس = $\tan x$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + c$$

$$\Rightarrow \int \csc^2 x \cos x\, dx$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x\, dx$$

$$\int (\sin x)^{-2} \cos x\, dx \qquad \cos x = \text{م.ي.ق}$$

$$= \frac{-1}{\sin x} + c$$

* تكامل الدوال المثلثية العكسية : (D)

$$\int \sec^2 X = \tan X + C$$
$$\int \csc^2 X = -\cot X + C$$

* مع تذكر توفير مشتقة الزاوية

* يكون تكامل كل من $\sec^2 X$ و $\csc^2 X$ مباشر.

* أما كل من $\sin^2 X$ ، $\cos^2 X$ ، $\tan^2 X$ ، $\cot^2 X$ يجب أن تحول باستخدام العلاقات التالية :

① $\sin^2 X = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2X$

② $\cos^2 X = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2X$

③ $\tan^2 X = \sec^2 X - 1$

④ $\cot^2 X = \csc^2 X - 1$

$\Rightarrow \int \sec^2 4x \, dx$

$\frac{1}{4}\int 4\sec^2 4x \, dx$ 4 = مشتقة الزاوية

$= \frac{1}{4}\tan^2 4x + c$

$\Rightarrow \int \csc^2 2x \, dx$

$\frac{1}{2}\int 2\csc^2 2x \, dx$ 2 = مشتقة الزاوية

$= -\frac{1}{2}\cot^2 2x + c$

$\Rightarrow \int \tan^2 7x \, dx$

$\int (\sec^2 7x - 1) \, dx \rightarrow \frac{1}{7}\int 7\sec^2 7x \, dx - \int dx$

$= \frac{1}{7}\tan 7x - x + c$

$\Rightarrow \int \cot^2 5x \, dx$

$\int (\csc^2 5x - 1) \, dx \rightarrow \frac{1}{5}\int 5\csc^2 5x \, dx - \int dx$

$= -\frac{1}{5}\cot 5x - x + c$

$\Rightarrow \int \sin^2 3x \, dx$

$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x\right) dx$ نوزع التكامل

$\frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\int 6\cos 6x$ مشتقة الزاوية = 6

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$

$\Rightarrow \int \cos^2 2x \, dx$

$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$

$\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int 4\cos 4x \, dx$ مشتقة الزاوية = 4

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$

$\Rightarrow \int (\sin^2 2x - \cos^2 4x) \, dx$

$\int \sin^2 2x \, dx - \int \cos^2 4x \, dx$

$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx - \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 8x\right) dx$

$\frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int 4\cos 4x \, dx - \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\int 8\cos 8x \, dx$

$= \frac{-1}{8}\sin 4x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$