الكلية	العلوم
القسم	الجيولوجي
المادة باللغة الانجليزية	Mathematics
المادة باللغة العربية	الرياضيات
المرحلة الدراسية	الأولى
اسم التدريسي	عمر محمد فخري
عنوان المحاضرة باللغة الانجليزية	Introduction to integration
عنوان المحاضرة باللغة العربية	مقدمة في التكامل
رقم المحاضرة	1
المصادر والمراجع	Thomas GB, Finney RL, Weir MD, Giordano FR. Thomas' calculus. Reading: Addison-Wesley; 2003.

جامعة الانبار
1987 1428
UNIVERSITY OF ANBAR

التكامل «Integration»

هو عملية ارجاع المشتقة الى الدالة التي تم اشتقاقها. اي انها عملية عكس عملية الاشتقاق. يكون التكامل اما غير محدد او محدد.

* قواعد التكامل: (غير محدد + محدد)

① $\int a\,dx = ax + C$ ← ثابت التكامل (مع غير المحدد فقط)

Example:

① $\Rightarrow \int 6\,dx = 6x + C$

② $\Rightarrow \int -\frac{1}{3}\,dy = -\frac{1}{3}y + C$

③ $\Rightarrow \int \sqrt{5}\,ds = \sqrt{5}s + C$

② $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Example:

④ $\Rightarrow \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

⑤ $\Rightarrow \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

⑥ $\Rightarrow \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2x^2} + C$

⑦ $\Rightarrow \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}x^{4/3} + C$

⑧ $\int x^{-1/2}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c$

⑨ $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx \rightarrow \int x^{2/3}\,dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$

ملاحظة / عكن توزيع التكامل على الجمع والطرح.

⑩ $\int (x^2+x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$

⑪ $\int (4x^3 - 3x^2 + 4)\,dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + 4x + c = x^4 + x^3 + 4x + c$

③ $\int [F(x)]^n \cdot F'(x) = \frac{[F(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

* تكامل قوس مرفوع الى أس :
I- نوفر مشتقة داخل القوس
II- نهمل المشتقة
III- نزيد الاس (1) ونقسم على الاس الجديد

Example:

⑫ $\int (x^3+4)^2 \cdot 3x^2\,dx = \frac{(x^3+4)^3}{3} + c$

⑬ $\int (2x^4-11)^7 \cdot 8x^3\,dx = \frac{(2x^4-11)^8}{8} + c$

⑭ $\int x^2 (x^3+2)^4\,dx$ مشتقة داخل القوس $3x^2$

$\frac{1}{3}\int 3x^2 (x^3+2)^4\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3+2)^5}{5} + c$

$= \frac{1}{15}(x^3+2)^5 + c$

(15) $\int x^3(1-x^4)^3\,dx$ — مفسحة داخل القوس $-4x^3$

$\frac{1}{-4}\int \underline{-4x^3}(1-x^4)^3\,dx = \frac{1}{-4}\cdot\frac{(1-x^4)^4}{4}+c$

$= \frac{-1}{16}(1-x^4)^4+c$

(16) $\int (1-2x)^{-2}\,dx$ — مفسحة داخل القوس -2

$\frac{1}{-2}\int \underline{-2}(1-2x)^{-2}\,dx = \frac{-1}{2}\frac{(1-2x)^{-1}}{-1}+c$

$= \frac{-1}{2(1-2x)}+c$

(17) $\int (x^2-5)^2\,dx$ — مفسحة داخل القوس $2x$ لا يمكن توفيرها

$\int (x^4-10x^2+25)\,dx$

$= \frac{1}{5}x^5-\frac{10}{3}x^3+25x+c$

(21) $\int (3x^3-5)\,dx$??

Ans: $\int (3x^3-5)\,dx$

$= \frac{3}{4}x^4-5x+c$

* التكامل المحدد :- يكون محدد بفترة $[a,b]$

$$\int_a^b F(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

← آلية الحل :

I . تجريد التكامل حسب القوانين السابقة

II . عدم اضافة ثابت التكامل (c)

III . بعد انهاء عملية التكامل نعوض حدود التكامل

الحد الاعلى $F(b)$ - الحد الادنى $F(a)$

Example:

(18) $\Rightarrow \int_1^2 3x^2\,dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_1^2 = [x^3]_1^2$

$= (2)^3 - (1)^3 = 7$

(19) $\Rightarrow \int_0^1 (3x+4)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_0^1$

$= \left[\underbrace{\left(\frac{3}{2}(1)^2 + 4(1)\right)}_{\text{حد اعلى}} - \underbrace{\left(\frac{3}{2}(0)^2 + 4(0)\right)}_{\text{حد ادنى}}\right]$ (ص)

$= \frac{11}{2}$

(20) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx \longrightarrow \int_1^4 (x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \left[\frac{2}{3}(x)^{3/2}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4$

$= \underbrace{\left(\frac{2}{3}\sqrt{(4)^3}\right)}_{b} - \underbrace{\left(\frac{2}{3}\sqrt{(1)^3}\right)}_{a} = \frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

(21) $\int_3^2 3x^2\,dx \longrightarrow -\int_2^3 3x^2\,dx$

$= -\left[x^3\right]_2^3 = -\left[(3)^3 - (2)^3\right] = -19$

Q1 $\int_{-2}^{2} (3x-2)\,dx$?

$= \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_{-2}^{2}$

$= \left[\underbrace{\left(\frac{3}{2}(2)^2 - 2(2)\right)}_{} - \underbrace{\left(\frac{3}{2}(-2)^2 - 2(-2)\right)}_{}\right]$

$= -8$

* الفرق بين مربعين

Example:

$\Rightarrow X^2 - 16 = (X-4)(X+4)$

$\Rightarrow X - 3 = (\sqrt{X}-\sqrt{3})(\sqrt{X}+\sqrt{3})$

$\Rightarrow X - 1 = (\sqrt{X}-1)(\sqrt{X}+1)$

$\Rightarrow X^2 - 5 = (X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5})$

* التجربة

Example

$\Rightarrow X^2 - 8X + 12 = (X-6)(X-2)$

$\Rightarrow X^4 - 6X^2 - 9 = (X^2-3)(X^2-3)$

$\Rightarrow X - 3\sqrt{X} + 2 = (\sqrt{X}-2)(\sqrt{X}-1)$

$\Rightarrow X - 7\sqrt{X} + 10 = (\sqrt{X}-5)(\sqrt{X}-2)$

* تكامل حاصل ضرب الاقواس :-

I . نتخلص من الاقواس (او توزيعها)

II . نجري عملية التكامل .

تكامل الكسور (القابلة للتحليل) :-

I . نقوم بتحليل ابسط ما يمكن (ان امكن)

II . نختصر

III . نجري عملية التكامل .

$$\Rightarrow \int (3x-4)(x+3)\,dx$$

$$\int (3x^2 + 9x - 4x - 12)\,dx$$

$$\int (3x^2 + 5x - 12)\,dx$$

$$= x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 12x + c$$

$$\Rightarrow \int_1^3 (x-2)(x+1)^2\,dx$$

$$\int_1^3 (x-2)(x^2 + 2x + 1)\,dx$$

$$\int_1^3 (x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2)\,dx$$

$$\int_1^3 (x^3 - 3x - 2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^3$$

$$= \left[\left(\frac{(3)^4}{4} - \frac{3}{2}(3)^2 - 2(3)\right) - \left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{3}{2}(1)^2 - 2(1)\right)\right]$$

$$= 4$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2\,dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,(x + 4\sqrt{x} + 4)\,dx$$

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(x + 4x^{\frac{1}{2}} + 4)\,dx \longrightarrow \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{2}x^2 + 4\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 2x^2 + \frac{8}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3}\right) - 0 = 76/15$$

* نقيد الاسس الى الجذور قبل التعويض

** عند الضرب نجمع الاسس .
عند الرفع نضرب الاسس .

$$\Rightarrow \int_2^3 \frac{2X^4-2}{2X-2}\,dx$$

$$\int_2^3 \frac{2(X^4-1)}{2(X-1)}\,dx \rightarrow \int_2^3 \frac{(X^2+1)(X^2-1)}{(X-1)}\,dx$$

$$\int_2^3 \frac{(X^2+1)(X+1)(X-1)}{(X-1)}\,dx \rightarrow \int_2^3 (X^3+X^2+X+1)\,dx$$

$$\therefore \left[\frac{X^4}{4}+\frac{X^3}{3}+\frac{X^2}{2}+X\right]_2^3 = \left[\left(\frac{3^4}{4}+\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+3\right)-\left(\frac{2^4}{4}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\right)\right]$$

$$= \frac{313}{12}$$

$$\Rightarrow \int_3^2 \frac{X^3-1}{X-1}\,dx$$

$$-\int_2^3 \frac{X^3-1}{X-1}\,dx \rightarrow -\int_2^3 \frac{(X-1)(X^2+X+1)}{(X-1)}\,dx$$

$$-\int_2^3 (X^2+X+1)\,dx$$

$$= -\left[\frac{X^3}{3}+\frac{X^2}{2}+X\right]_2^3 = -\left[\left(\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+3\right)-\left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\right)\right]$$

$$= -59/6 .$$

$$\Rightarrow \int \frac{X^2 - X}{\sqrt{X} - 1}\, dx$$

$$\int \frac{X(X-1)}{(\sqrt{X}-1)}\, dx \longrightarrow \int \frac{X(\sqrt{X}+1)(\sqrt{X}-1)}{(\sqrt{X}-1)}\, dx$$

$$\int X(\sqrt{X}+1)\, dx \longrightarrow \int X(X^{\frac{1}{2}}+1)\, dx$$

$$\int (X^{\frac{3}{2}} + X)\, dx = \frac{2}{5} X^{\frac{5}{2}} + \frac{X^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{X - \sqrt{X} - 2}{X + \sqrt{X}}\, dx$$

$$\int \frac{(\sqrt{X}-2)(\sqrt{X}+1)}{\sqrt{X}(\sqrt{X}+1)}\, dx \longrightarrow \int \frac{(\sqrt{X}-2)}{\sqrt{X}}\, dx$$

$$2\int \frac{(\sqrt{X}-2)}{2\sqrt{X}}\, dx$$

∴ مشتقة داخل القوس $= \frac{1}{2\sqrt{X}}$

$$= 2 \cdot \frac{(\sqrt{X}-2)^2}{2} + C = (\sqrt{X}-2)^2 + C$$

H.W:- $\int \frac{X - 5\sqrt{X} + 6}{X - 3\sqrt{X}}\, dx$