درجة المصفوفة أو سعة المصفوفة

مثال: اذا كانت المصفوفة A تتكون من

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

3.4

جد a_{23} ، a_{11} ، a_{32} ، a_{21} ، $.a_{3.4}$

$a_{21} = 2$

$a_{32} = 4$

$a_{11} = 1$

$a_{23} = 7$

$a_{34} = 6$

مثال:

اذا كانت المصفوفة A تمثلها العناصر الآتية:

ومصفوفة B وهي مصفوفتان متساويتان

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & 5 \\ 3 & a+b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$

الصف الاول - العمود الاول

$a + b = 7$

$3 + 4 = 7$

العمليات الحسابية للمصفوفات

* عملية جمع وطرح المصفوفات :

اذا كانت المصفوفتان A و B لهما نفس الدرجة (n.m)
فان حاصل جمعهما أو طرحهما يكون المصفوفة [C] بحيث تكون
درجتها مساوية الى (n.m) .
ان كل عنصر من عناصر المصفوفة [C] يمثل $[C_{ij}]$
وهو يمثل حاصل جمع أو طرح العنصرين المتناظرين من المصفوفتين
A و B أي أن :

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}] = [c_{ij}] = [C]$$

مثال على ذلك :
جد مجموع المصفوفتين A و B

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}_{3.3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{3.3}$$

طالما أن درجتي المصفوفتين متساويتين ، فانه يوجد حل لهما ،
وعليه فان حاصل جمع المصفوفتين A و B هو :

$$A+B = \begin{bmatrix} 8+1 & 9+3 & 7+6 \\ 3+5 & 6+2 & 2+4 \\ 4+7 & 5+9 & 10+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

مثال آخر:

جد ناتج طرح المصفوفتين C و D

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C - D = \begin{bmatrix} 4-1 & 9-7 \\ 2-5 & 6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2

* خواص الجمع:

1. $A+B = B+A$
2. $A+(B+C) = (A+B)+C$

   $A+(B-C) = (A+B)-C$
3. $k(A+B) = kA + kB = (A+B)\cdot k$

   حيث k عدد حقيقي

4. $A+(B-C) = (A+B)-C$

أسئلة على خواص الجمع:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

أثبت أن $A + (B + C) = (A + B) + C$

نستخرج الطرف الأيسر:

$$B + C = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \quad ، \quad A + (B + C) = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}$$

الطرف الأيمن:

$$A + B \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad ، \quad (A + B) + C = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}$$

تساوي

$$A + (B - C) = (A + B) - C$$

الطرف الأيسر

$$B - C \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} \quad ، \quad A + (B - C) \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

الطرف الأيمن

$$A + B = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad ، \quad (A + B) - C = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $k = 3$

أثبت أن :

$$k(A+B) = kA + kB = (A+B)k$$

$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ، $k(A+B) = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 21 & 27 \end{bmatrix}$

$kA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ ، $kB = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$ ، $kA+kB = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 21 & 27 \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ، $(A+B)k = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 21 & 27 \end{bmatrix}$

* ضرب المصفوفات

١. حاصل ضرب مصفوفة في أخرى

يُشترط في ضرب مصفوفتين توافر شرط الموافقة ... وهي أن تكون الأعمدة في احد المصفوفات تساوي الصفوف في المصفوفة الأخرى ....

اذاً يمكن ضرب المصفوفتين A ، B في حالة واحدة وهي اذا كان عدد الاعمدة في المصفوفة A مساوياً لعدد الصفوف من المصفوفة B .
وتتم العملية بضرب عناصر كل صف من المصفوفة A في عناصر كل عامود في المصفوفة B وحسب الترتيب ونجمع حاصل الضرب .

مثال على ذلك ،
جد حاصل ضرب المصفوفتين A و B

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 12 & 9 & 11 \end{bmatrix}_{2 \cdot 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 5 & 10 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}_{3 \cdot 2}$$

يجب التساوي

المصفوفة الناتجة

نلاحظ انه ممكن اجراء عملية الضرب لتحقق شرط الموافقة ، اذا ان عدد اعمدة المصفوفة A هو 3 وعدد صفوف المصفوفة B هو 3

الحل:

$$C = \begin{bmatrix} 3(6)+6(5)+7(13) & 3(12)+6(10)+7(2) \\ 12(6)+9(5)+11(13) & 12(12)+9(10)+11(2) \end{bmatrix}_{2.2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 139 & 110 \\ 260 & 256 \end{bmatrix}_{2.2}$$

٢. حاصل ضرب متجهين

نتبع نفس قاعدة ضرب المصفوفتين (تطابق الأعمدة مع الصفوف)

مثال:

اضرب المتجهين A و B

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{1.3} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{3.1}$$

تساوي

النتيجة

$$A.B = \begin{bmatrix} 5(10)+2(3)+4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \end{bmatrix}_{1.1}$$

٣. حاصل ضرب متجه في مصفوفة :
ايضاً يجب التأكد من شرط الموافقة

مثال: اذا كانت المصفوفة X والمتجه b كما معطيين ، ما هو حاصل ضربهما.

$$b = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{1.3} \qquad X = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}_{3.3}$$

نتيجة الضرب

تساوي

$$b.X = \begin{bmatrix} 3(3)+1(2)+4(4) & 3(5)+1(6)+4(8) & 3(4)+1(1)+4(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27 & 53 & 21 \end{bmatrix}_{1.3}$$

٤. حاصل ضرب مصفوفة في متجه
مثال: اضرب المصفوفة X بالمتجه b

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}_{3.3} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3.1}$$

الاعمدة = الصفوف

$$X \cdot b = \begin{bmatrix} 3\times3 + 5\times1 + 4\times4 \\ 2\times3 + 6\times1 + 1\times4 \\ 4\times3 + 6\times1 + 2\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30 \\ 16 \\ 26 \end{bmatrix}$$

3.1

* خواص ضرب المصفوفات

1. $A(B+C) = AB + AC$

2. $(A+B)C = AC + BC$

3. $(A')' = A$

4. $(A+B)' = A' + B'$

5. $(AB)' = B'A'$

أمثلة متعددة على ضرب المصفوفات ..

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 تساوي 2.2

النتيجة

$$A.B = \begin{bmatrix} 3\times7 + 5\times2 & 3\times(-3) + 5\times1 \\ 2\times7+4\times2 & 2\times(-3) + 4\times1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 21+10 & -9+5 \\ 14+8 & -6+4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 31 & -4 \\ 22 & -2 \end{bmatrix}$$

2.2

لنفس المصفوفتين جد $B.A$

$$B.A = \begin{bmatrix} 7\times3 + (-3)\times2 & 7\times5 + (-3)\times4 \\ 2\times3 + 1\times2 & 2\times5 + 1\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-6 & 35-12 \\ 6+2 & 10+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 23 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$$

يتضح أن نتيجة $A.B \neq B.A$

- ضرب معامل عددي في المصفوفة :

يتم ضرب المعامل العددي (k) بجميع ارقام المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad k = 5$$

$$5.A = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 10 \\ -5 & 30 & 15 \end{bmatrix}$$

- مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.3 متساوية 3.1

المصفوفة الناتجة

$$A.B = \begin{bmatrix} 3\times2 + 5\times(-3) + (2)\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 - 15 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix}$$

1.1

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}$$

$$3.1 \qquad 2.2$$

غير متساوية .. لايمكن اتمام عملية الضرب ، بمعنى ان الاعمدة للمصفوفة A هي (1) لاتساوي عدد صفوف المصفوفة B وهي (2)

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\end{bmatrix}_{1.3}$$

جد A.A

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\end{bmatrix}_{1.3} \qquad A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\end{bmatrix}_{1.3}$$

غير متساوية ... لايمكن اجراء عملية الضرب

مثال: جد $A.A$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

2.2 2.2

متساوية

ممكن اجراء عملية الضرب

$$A.A\begin{bmatrix}1\times1+2\times0 & 1\times2+2\times3\\ 0\times1+3\times0 & 0\times2+3\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+0 & 2+6\\ 0+0 & 0+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\end{bmatrix}$$

2.2

نستنتج انه اذا كانت المصفوفة مربعة ... فيمكن ضربها بنفس المصفوفة.

مثال ، اذا كانت لديك المصفوفتين A و B

جد : $2A - 3B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 14 & -6 & 8 \end{bmatrix} \qquad 3B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & 15 & -3 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 4-9 & -2-0 & 10-6 \\ 14-0 & -6-15 & 8-(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 14 & -21 & 11 \end{bmatrix}$$