المصفوفات وتطبيقاتها الاقتصادية

المصفوفة:

عبارة عن مستطيلة تحتوي على مجموعة من الأعداد والرموز وهذه الأعداد تأتي في شكل معادلات أو متغيرات وهذه تشكل عناصر المصفوفة Matrix elements ... وهذه العناصر مرتبة في خانة صفوف (Rows (n وأعمدة Columns (m) و تقرأ المصفوفة عادة [n.m] إذ يتقدم رقم الصف دائما على رقم العامود ... وقد تأخذ المصفوفة عناصرها وأبعادها و صفوفها وشكل المستطيل أو المربع أو تحصر داخل قوسين كبيرين.

ويشار الى المصفوفة بحرف كبير [A] أو [B] أو أي حرف آخر، أما عناصرها فتمثل بحروف صغيرة، فمثلا a_{ij} في مصفوفة [A] إذ تشير (i) الى رقم الصف الذي يقع فيه العنصر أما (j) فيشير الى رقم العامود الذي يقع فيه العنصر.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وبصورة عامة فأن أي مصفوفة تأخذ الشكل الآتي:

$$A_{n\times m}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nm} \end{bmatrix}$$

نجد مثلاً a_{32} يكون في العنصر الذي في الصف الثالث والعمود الثاني

وتحتوي هذه المصفوفة على (n) من الصفوف و (m) من الأعمدة وتقرأ بـ $(n.m)$ وتسمى رتبة أو حجم المصفوفة.

عندما نقول ان المصفوفة [A] مثلاً درجتها (3.2) أي ثلاثة صفوف وعمودين... مثال على ذلك:

$$A_{(3.2)}=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 10 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}=4 & a_{12}=-2 \\ a_{21}=10 & a_{22}=1 \\ a_{31}=2 & a_{32}=6 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أنواع المصفوفات

١. المصفوفة المربعة : Square Matrix

وهي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها (n) مساوياً لعدد أعمدتها (m)

مثال:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 10 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

وان العناصر a_{11} و a_{22} و a_{33} تمثل العناصر القطرية.

٢. المصفوفة المتساوية : Equal Matrix

يقال للمصفوفتين A, B بأنهما متساويتان اذا كان جميع العناصر في المصفوفة A مساوية لجميع العناصر المناظرة في المصفوفة B اي ان

$$a_{ij} = b_{ij}$$

وان المصفوفتين لهما نفس الرتبة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}_{2\times2} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

اي ان $a_{ij} = b_{ij}$

idea Plus
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3. المصفوفة المحولة : Transpose Matrix

اي مبدل المصفوفة A ، وهي عبارة عن مصفوفة جديدة يرمز لها A' ، ويمكن الحصول عليها بتحويل او تبديل الصفوف في المصفوفة A الى أعمدة واعمدتها الى صفوف.

مثلاً : اذا كانت المصفوفة A هي

$$A_{3.2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}_{3.2}$$

فأن المصفوفة المحولة A' هي

$$A'_{2.3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2.3}$$

نلاحظ هنا أن العمود الأول في المصفوفة A أصبح الصف الاول في المصفوفة A' ، وكذلك فان العمود الثاني في المصفوفة A أصبح الصف الثاني في المصفوفة A' ، كذلك نلاحظ ان رتبة المصفوفة A هي (3.2) ، اصبحت رتبة المصفوفة A' [2.3]

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

4. المصفوفة المتماثلة: Symmetric Matrix

وهي مصفوفة مربعة تكون عناصرها a_{ij} مساوية a_{ji} أي $a_{ij} = a_{ji}$، لذلك فالمصفوفة المتماثلة تكون متماثلة عندما $A = A'$.

مثال على ذلك:

$$A_{3.3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} = A'$$

5. المصفوفة الصفرية: Zero Matrix

وهي مصفوفة جميع عناصرها تساوي صفر

مثال ذلك:

$$A_{3.3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. المتجه الأفقي والعمودي Row and Column Vector

إذا كانت درجة المصفوفة $(1.m)$ فإنها تسمى متجهاً أفقياً

$$X_{1.m} = [X_{11} \quad X_{12} \quad \dots \quad X_{1m}]$$

$$X = [2 \quad 3 \quad 5 \quad 6]_{1.4}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أما اذا كانت درجة المصفوفة $(n,1)$ فانها تسمى متجهاً عمودياً

$$b_{n,1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \qquad b_{3,1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

7. المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

هي المصفوفة المربعة التي تكون جميع عناصرها غير القطرية مساوية للصفر، بينما عناصرها القطرية فانها تكون من قيم مختلفة.

مثال:

$$A_{3,3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

8. المصفوفة العددية: Scalar Matrix

وهي المصفوفة التي عناصرها القطرية متساوية، شرط الاتساوي واحد

$$A_{3,3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

9. المصفوفة المحايدة (المصفوفة الواحد)
Unit Matrix

وهي المصفوفة القطرية التي عناصر القطر فيها مساوية للواحد فقط ، وان بقية العناصر خارج القطر تساوي صفر ، ويرمز لها I_n

مصفوفة مربعة

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ان العمليات الحسابية لهذه المصفوفة مشابهة للعمليات الحسابية الاعتيادية للعدد واحد ، فمثلاً ضرب مصفوفة في المصفوفة المحايدة ، يترك المصفوفة الأصلية بدون تغيير .

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

كما أن ضرب المصفوفة المحايدة في نفسها يبقي المصفوفة كما هي ، اي

$$I \cdot I = I^2 = I$$

10. العامل العددي Scalar

يُطلق على المصفوفة المكونة من صف واحد وعامود واحد بالعامل العددي

$$A_{1,1} = [48] \qquad B_{1,1} = [8]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

11. المصفوفة الجزئية: Sub Matrix

وهي المصفوفة التي نحصل عليها عند حذف صف أو عامود أو أكثر من المصفوفة الأصلية.

فإذا كانت المصفوفة A هي المصفوفة الأصلية

$$A_{4\times4} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

ليكن لدينا المصفوفات الجزئية الآتية:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{1\times3} \qquad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_{1\times1}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner