مفاهيم وتعاريف اساسية

Basic Definitions and concepts

يتناول هذا الفصل تعريف القارئ بالمفاهيم والتعاريف الاساسية المستخدمة في الرياضيات وربطها بالنظرية الاقتصادية على المستوى الكلي والجزئي. سوف يتم استعراض الرموز الرياضية والتي تأخذ اشكالاً مختلفة مثل الدوال والمعادلات وانواعها والنماذج الاقتصادية ومكوناتها. سوف يلاحظ القارئ ان استخدام تلك الاساليب الرياضية يساهم في عرض النظرية الاقتصادية بطريقة سهلة ومباشرة، ويساهم ايضا في ربط المتغيرات فيما بينها وايجاد حلول سهلة لها.

1.1 طبيعة ومفهوم الاسلوب الرياضي في العلوم الاقتصادية

يعتبر الاسلوب الرياضي أحد الاساليب المهمة في عرض وتحليل الظواهر والنظريات وربط المتغيرات الاقتصادية بعلاقات رياضية متعددة الاشكال. ومن أجل توضيح هذه العلاقات وربطها بالنظرية الاقتصادية على المستوى الجزئي والكلي، فإن استخدام الاسلوب والرموز الرياضية والذي يأخذ اشكالاً دالية Functional Forms، يعتبر في الوقت الحالي وسيلة أساسية من وسائل التحليل الاقتصادي. في الماضي، كانت النظرية الاقتصادية تعتمد كثيراً على العرض والتوضيح البياني أو الهندسي Curves Explanation كوسيلة أساسية من وسائل التحليل الاقتصادي ، حيث يُمثَل العنصر المستقل Independent Variable (X) على المحور الافقي ، في حين يُمثل المتغير التابع dependent variable (Y) على المحور العامودي. ولكن نظراً للقصور الذي صادف هذا الاسلوب نتيجة لتقيد التحليل بمتغيرين فقط، فقد ظهرت ضرورة استخدام الاساليب والطرق الرياضية في العلوم الاقتصادية المختلفة. ويعتبر الاقتصادي كورنت Cournot أول من استخدم المنطق الرياضي في التحليل الاقتصادي. ومن الممكن ذكر خصائص عديدة يمتاز بها الاسلوب الرياضي حين استخدامه في العلوم الاقتصادية منها :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

1 – يعتبر الاسلوب الرياضي اكثر اقناعاً من الاسلوب اللفظي (الوصفي) discriptive approach .

2 – ان اللغة المستخدمة في الاسلوب الرياضي اكثر اختصاراً ودقة من الاساليب الاخرى.

3 – يمكن استخدام الاسلوب الرياضي للتعامل مع النماذج الاقتصادية economic models والتي تحتوي على اكثر من متغيرين. كما أدى ايضاً الى سهولة بناء النماذج الاقتصادية على مستوى الاقتصاد الجزئي والكلي. إن هذه النماذج مهمة وخاصة في مجال التخطيط الاقتصادي ، حيث تساعد على التنبؤ والتوقع Prediction and expectation

4 – الاسلوب الرياضي يمنع الاستطراد في المناقشة المبهمة

1 . 2 الاسلوب الرياضي في الاقتصاد وعلاقته بالاقتصاد القياسي

ان الاسلوب الرياضي ما هو إلا ترجمة حرفية لمنطوق النظرية الاقتصادية وبشكل رموز وقيم ومعادلات. أما الاقتصاد القياسي فهو عبارة عن الدمج بين الاسلوب الرياضي في الاقتصاد والطرق الاحصائية ومنطوق النظرية الاقتصادية. ومن هذا نجد بأنه يوجد اختلاف بين الاسلوب الرياضي والاقتصاد القياسي، حيث أن الأخير لا يعرض المشكلة الاقتصادية في شكل محدد exact ، وانما يدخل عليه العنصرين التاليين وهما :

أ) اضافة المتغير العشوائي (e_i) أو ما يسمى random variable الى المعادلة الرياضية .

ب) ايجاد قيمة تقديرية لمؤشرات المعادلة أو النموذج estimated values for the parameters ، أي (α) و β . وعليه فان التفسير القياسي لدالة الاستهلاك مثلاً، والتي تربط الدخل المتاح للمستهلك مع استهلاكه من السلع والخدمات، بأن تلك الدالة تأخذ الشكل التالي :

$$C = f(Y) + e_i$$

أو

$$C = \alpha + \beta Y_d + e_i$$

حيث أن C : الاستهلاك من السلع والخدمات

Y_d : الدخل المتاح

α ، β : ثوابت يتم تقديرها لاحقاً

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أما الاسلوب الرياضي فهو يعرض العلاقات الاقتصادية في صيغة محددة Exact form ، كما هو الحال في دالة الاستهلاك السابقة، حيث تقول النظرية ان الاستهلاك C دالة للدخل Y ، أي أن :

$$C = f(Y)$$

أما العرض الرياضي لها فهو كما يلي :

$$C = a + b\ Y$$

ولهذا ، فان الاقتصاد القياسي يناقش النظرية الاقتصادية بشكل غير محدد (unexact)، وذلك لوجود متغيرات محددة وغير محددة، وبذلك فهو يُعد أوسع من الاسلوب الرياضي في التحليل الاقتصادي.

1.3 المعادلات والدوال واستخداماتها الاقتصادية :

Equations, Functions and their Economic Uses

تُعبر الدالة (Function) عن منطوق النظرية الاقتصادية كالعلاقة بين متغيرين أو اكثر، ولا تحدد الدالة شكل العلاقة أو اتجاهها أو مقدارها (قوتها)، وتكون على النحو التالي : $Y = F(X)$

حيث أن المتغير (X) يؤثر على المتغير (Y) ، ولكن هذا التأثير غير محدد، .ويتم التعبير عن العلاقات الاقتصادية بدوال، كأن نقول بأن الاستهلاك C دالة (F) للدخل Y ، أي أن :

$$C = F(Y)$$

اذن تشير (F) الى وجود تأثير من متغير أو متغيرات تسمى المتغيرات المستقلة Independent Variables على متغير أو متغيرات تابعة Dependent Variables .

أما المعادلة فهي تعبيراً رياضياً للدالة، اذ تبين العلاقة بين المتغيرات التابعة والمستقلة بشكل ادق من الدالة، حيث أن المعادلة تبين اتجاه العلاقة (سلبية أم ايجابية) وقوة العلاقة اضافة لشكل تلك العلاقة.

وكمثال على ذلك، ذكرنا سابقاً أن الاستهلاك C دالة للدخل Y أي أن : $C = F(Y)$

وعند معالجة تلك الدالة رياضياً تحوّل الى معادلة Equation ، وبافتراض خطية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

العلاقة، فان العلاقة السابقة بين الاستهلاك والدخل تكتب على شكل معادلة (Equation) كالتالي :

$$C = a + bY$$

وهذه المعادلة تشير الى ان المتغير (C) هو المتغير التابع وان المتغير (Y) هو المتغير المستقل، وان العلاقة بينهما تعتمد على قيمة (b) ، وان شكل العلاقة خطي. أما المعاملات (a) و (b) فيعبران عن دقة العلاقة من حيث قوتها واتجاهها. حيث أن (a) تشير الى قيمة المتغير التابع (C) عندما تكون قيمة المتغير المستقل (Y) تساوي صفراً. أما (b) فتشير الى ان المتغير التابع (C) سوف يتأثر بمقداره اذا ما تغير المتغير المستقل (Y) بمقدار وحدة واحدة.

اذن، المعادلة الرياضية تتكون من :

- **المؤشرات** ، وتتكون من الثابت (a) ويطلق عليه ثابت المعادلة أو المقطع Intercept . وكذلك تتكون من المعامل أو الميل Coefficient أو Slope ، وهو يمثل مقدار التأثير أو التغيير في المتغير التابع اذ تغير المتغير المستقل بوحدة واحدة.
- **المتغيرات** Variables . ويعرّف المتغير بأنه الظاهرة التي يمكن ان تتغير قيمة عناصرها . والمتغيرات المستخدمة في الاقتصاد كثيرة مثل السعر، الايراد الكلي، التكاليف، الدخل القومي، الصادرات، الاستثمار، وغير ذلك . وبما ان المتغير يأخذ قيماً مختلفة فيمكن تمثيله برمز مثل التكاليف الكلية (TC) والادخار (S) وهكذا. وتنقسم هذه المتغيرات الى نوعين : متغيرات داخلية Endogenous Variables ، ومتغيرات خارجية Exogenous Variables . ان الفرق بينهما، ان المتغيرات الداخلية تتحدد قيمتها داخل النموذج ، أما المتغيرات الخارجية فان قيمتها معطاة من قبل قوى خارج النموذج.

1.4 المعادلات الهيكلية وانواعها Types of Structural Equations

يمكن تقسيم المعادلات الهيكلية بالاستناد الى محتواها الاقتصادي وليس على اساس شكلها الرياضي – الى خمسة أنواع :

1. المعادلات التعريفية Definitional Equations وهي المعادلات التي تُعرّف أحد متغيراتها تعريفاً غير مشروط، أي انها معادلات محاسبية Accounting Equations. فمثلاً

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تُعرف النظرية الاقتصادية بأن الدخل المتاح (Yd) عبارة عن الاستهلاك (C) مضافاً اليه الادخار (S) ، وهذا يعني بأن الادخار يساوي الدخل المتاح مطروحاً منه الاستهلاك . ويمكن توضيح ذلك رياضياً :

$$Y_d = C + S$$

$$\therefore S = Y_d - C$$

وهناك العديد من الامثلة على هذا النوع من المعادلات. مثل معادلة الربح التي تنص على أن اجمالي الربح هو اجمالي الايرادات (TR) مطروحاً منه اجمالي التكاليف (TC) . وهذه المعادلات يقال عنها انها صحيحة بالتعريف حيث تكون اشارة المساواة فيها بهذا الشكل (≡) .

2. المعادلات السلوكية Behavioral Equations

وهي المعادلات التي تصف السلوك الاقتصادي للمتغير، كسلوك المنتجين أو المستهلكين أو المستثمرين . وكذلك هي التي تفسر القرارات التي يتخذونها عندما يحدث تغير في المتغيرات الاخرى. ومن الامثلة على ذلك، معادلة الطلب، معادلة العرض، معادلة الاستهلاك، معادلة الاستثمار، معادلة التكاليف، وغير ذلك.

3. المعادلات المؤسسية Institutional Equations

وتسمى احياناً بالمعادلات التنظيمية وهي لا تصدر عن النظرية الاقتصادية، وانما هي التي تصف نمطاً معيناً من السلوك يحدده العرف والتقاليد والقانون. وهناك العديد من الامثلة على هذا النوع من المعادلات. مثل الضرائب والرسوم الجمركية وغيرها . ومثال ذلك، ان الكميات المعروضة (Qs) تتأثر بالسعر وكذلك بالضريبة بعد فرضها على السلعة، وعليه فان معادلة العرض ستكون بعد فرض الضريبة :

$$Q_s = c + e\ (P - t)$$

بدلاً من

$$Q_s = c + e\ P$$

4. معادلات شرط التوازن (التوازنية) Equilibrium Condition Equations

وهي المعادلات التي تأخذ صيغة تساوي الجانبين، وهي التي تحقق شرط التوازن للنموذج . وفي الاقتصاد هناك العديد من شروط التوازن في الاسواق المختلفة. مثلاً

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

شرط التوازن في سوق سلعة معينة يقتضي ان تتساوى الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة Qs = Qd .

وكذلك في سوق النقد، فان شرط التوازن يقتضي أن يتساوى عرض النقود (Ms) مع الطلب على النقود (Md) :

$$Ms = Md$$

5. المعادلات الفنية Technical Equations

وهي المعادلات التي تشرح العلاقات الاقتصادية القائمة بين المتغيرات وفقاً للمستوى التقني السائد. ومن الامثلة على ذلك، دالة الانتاج، كدالة انتاج كوب – دوجلاس Cobb - Douglas Production Function . حيث تبين العلاقة ما بين الانتاج النهائي والمدخلات المختلفة التي شاركت في هذا الانتاج، أي ان :

$$Q = A\ L^{\alpha}\ .\ K^{B}$$

أي ان الانتاج (Q) دالة لعوامل الانتاج وهي العمل (L) ورأس المال (K) ، ومعلمات تلك العوامل الانتاجية (∝) و (ß) .

1.5 الدوال وانواعها Types of Functions

تُعرّف الدالة بأنها منطوق النظرية الاقتصادية. ويمكن تقسيم الدوال من حيث عدد المتغيرات الى ثلاثة أنواع رئيسية هي :

1. الدالة الثابتة Constant Function

وهي الدالة التي تمثل مقدار ثابت، أي أن :

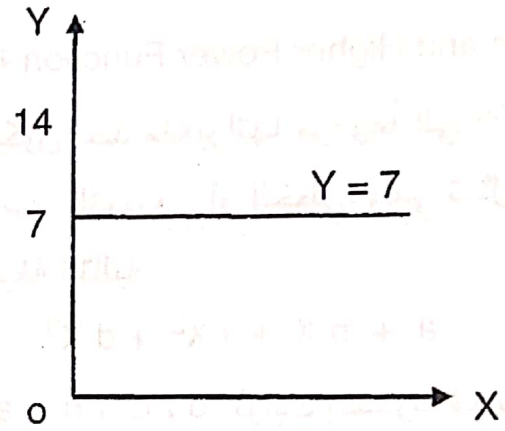
$$Y = a + b\ (o)$$

أي ان $Y = a$

وكذلك $Y = F\ (x) = 7$

وهذا يعني ان Y تأخذ قيمة ثابتة عند قيمة X المساوية للصفر كما في المعادلة الاولى، وتكون قيمة Y ثابتة عند مختلف مستويات X كما في المعادلة الثانية . يمكن تمثيل هذه الدالة بيانياً بخط مستقيم موازٍ للمحور الافقي الذي يمثل المتغير (X) كما هو مبين في الشكل 1.1 إدناه :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



شكل 1 . 1

2. الدوال ذات المتغير الواحد Functions of One Variable وهي الدوال التي يكون بها المتغير التابع دالة لمتغير مستقل واحد فقط. وهناك عدة انواع من هذه الدوال أهمها :

أ) الدالة الخطية Linear Function

وهي الدالة التي يكون فيها قوة (أس) المتغير المستقل يساوي واحد. ويطلق على هذه الدالة معادلة من الدرجة الاولى، والصيغة العامة لها هي :

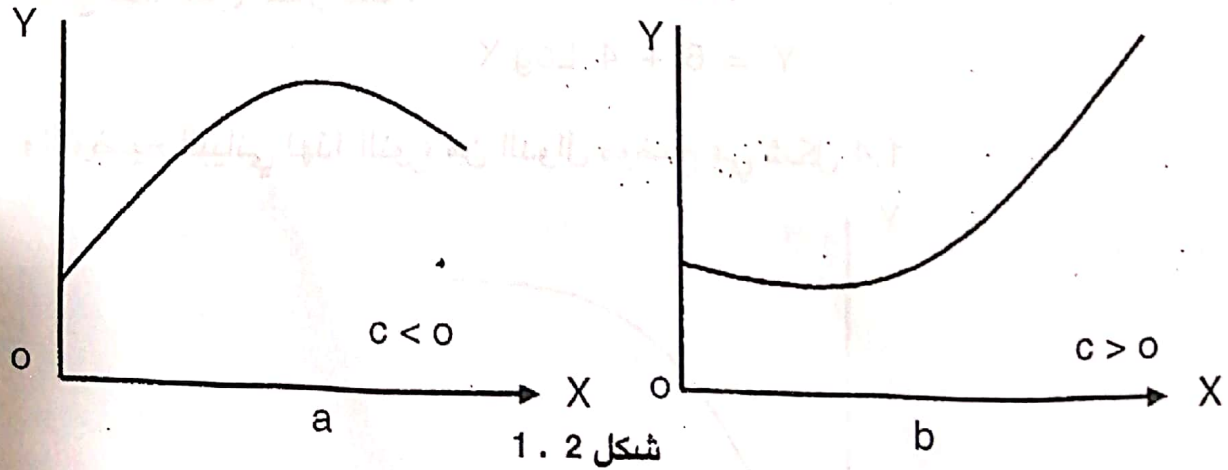
$$Y = a + b\,X$$

حيث أن قوة (اس) المتغير X تساوي واحد.

ب) الـدالة التربيعيـة Quadratic Function

وهي الدالة التي يكون أحد متغيراتها مرفوعاً الى الأس اثنين، أما باقي متغيراتها فتكون مرفوعة للأس واحد. وعليه يطلق عليها داله من الدرجة الثانية، وصيغتها كالاتي :

$$Y = a + b\,x + c\,X^2$$



شكل 1 . 2

حيث ان a ، b ، c ثوابت. كما أن قيمة c لابد أن لا تساوي الصفر. انظر رسم الدالة في الشكل (1.2a , 1.2b) .

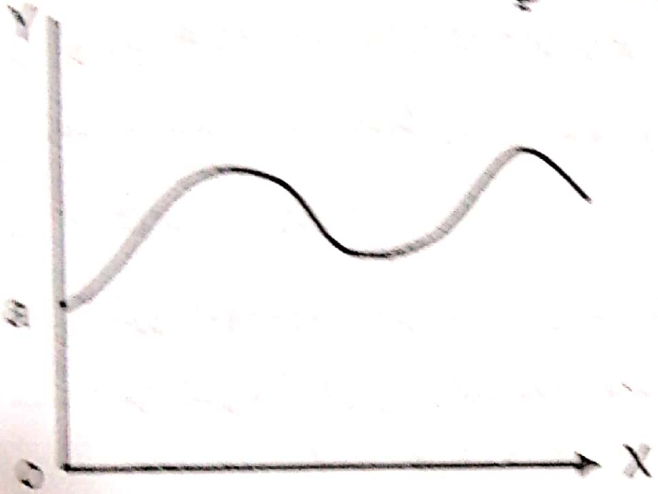
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حـ) الدالة التكعيبية Cubic and Higher Power Function

وهي الدالة التي يكون احد متغيراتها مرفوعاً الى الاس ثلاثة او اعلى
فهي مرفوعة للاسس التربيعي أو الخطي وهي تمثل العوامل من الدر
وتأخذ الدالة الصيغة التالية :

$$Y = a + bX + cX^2 + dX^3$$

حيث ان القيم a ، b ، c ، d ثوابت بشرط فيها ان تكون لا تس
للصفر. انظر رسم الدالة في الشكل 1.3



شكل 1.3

د) أنواع أخرى من الدوال

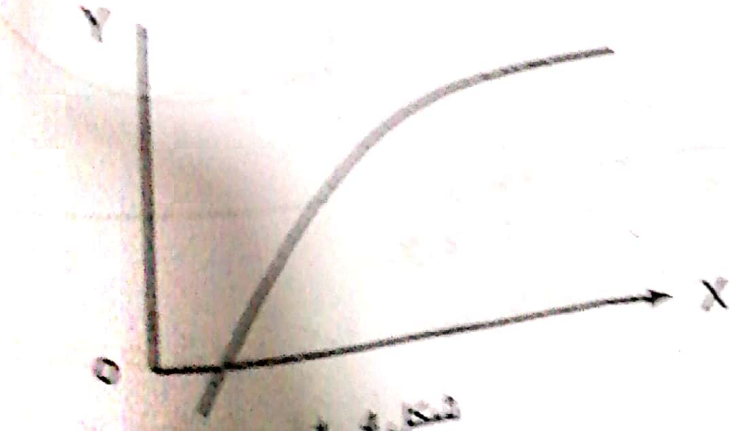
هناك انواع اخرى من الدوال التي تتضمن متغير مستقل واحد وهي :

- الدوال اللوغريتمية Logarithmic Functions

ان اللوغريتم عملية عكسية لعملية الأس، وهو القوة التي يجب ان يرفع ا
لينتج عدد معين. مثال ذلك :

$$Y = 6 + 4 \text{ Log } X$$

والتوضيح البياني لهذا النوع من الدوال موضح في شكل 1.4 .



شكل 1.4

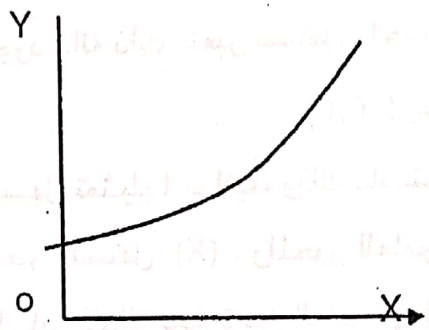
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- الدوال الأسية Exponential Functions

وهي التي يكون بها المتغير المستقل أساً، وصيغتها هي :

$$Y = 2^X$$

وهذه الدالة ضرورية في التطبيقات الاقتصادية، خاصة لتوضيح النمو للكثير من المتغيرات الاقتصادية، والتوضيح البياني لهذه الدالة مبين في شكل 1.5 .



$Y = b^x$
$b > o$

شكل 1.5

- الدوال النسبية Ratio Functions

ومثال ذلك :

$$Y = \frac{X - 1}{X^2 + 2X + 4}$$

- الدوال ذات المتغيرين أو اكثر Functions of Two or More Variables

ليست جميع الدوال الصريحة Explicit Functions دوال ذات متغير واحد، بل يمكن تكون دوال ذات متغيرين أو اكثر. فكما لاحظنا سابقاً ان الدالة الضمنية ذات المتغيرين ل $F(X, Y)$ يمكن ان تكتب كدالتين صريحتين ذات متغير واحد، أي

$$Y = f(X)$$

وان $X = f(Y)$

وبالمثل فان الدالة الضمنية ذات الثلاث متغيرات $F(X, Y, Z)$ يمكن ان تكتب على كل ثلاث دوال صريحة كالتالي :

$$X = f(Y, Z)$$
$$Y = f(X, Z)$$
$$Z = f(X, Y)$$

وكمثال على استخدام الدوال ذات المتغيرين أو اكثر في النظرية الاقتصادية، يمكن

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاشارة الى دالة الطلب، حيث نعلم بأن الكمية المطلوبة Qd من السلعة X دالة في
السلعة (P_x) واسعار السلع البديلة (P_y) واسعار السلع المكملة (P_z) ودخل المس
والاذواق (T)، وعليه فان دالة الطلب ستكون على النحو التالي :

$$Qd = f (P_x , P_y , P_z , Y , T)$$

1.6 المنحنيات والميـ Curves and Slope

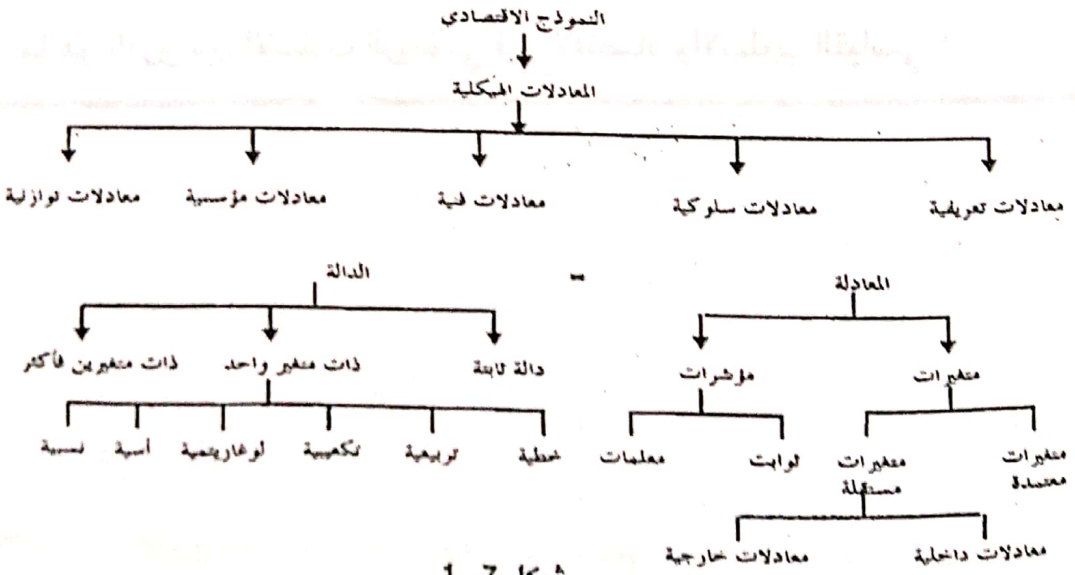
1.7 مكونات النموذج الاقتصادي Components of Economic Models

يعرّف النموذج بأنه مجموعة من العلاقات الاقتصادية التي توضع عادة بصيغ رياضية وتسمى المعادلة (أو مجموعة من المعادلات) التي تشرح سلوكية هذه العلاقات، بالمعادلات الهيكلية Structural Equations . ان المعادلات الهيكلية تكون على خمسة انواع وقد تم ذكرها سابقاً في الفرع 1.4، وهي المعادلات التعريفية والسلوكية والفنية والتوازنية والمعادلات المؤسسية. اذن، فان النموذج الاقتصادي هو صورة مبسطة تمثل النشاط الاقتصادي للبلد أو القطاع خلال فترة زمنية معينة وبشكل رموز وقيم عددية. ولكي يكون النموذج قادراً على قياس العلاقات الاقتصادية، لابد وان تتوفر فيه الشروط التالية :

1. تطابق متغيرات النموذج مع منطوق النظرية الاقتصادية.
2. تطابق تقدير معلمات النموذج وقيمها الحقيقية.
3. امكانية استخدام القيم المقدرة لمتغيرات النموذج للتنبوء.
4. بساطة عرض النموذج للعلاقات الاقتصادية بمعادلات رياضية تتطابق ومنطوق النظرية الاقتصادية.

قد يتكون النموذج من معادلة واحدة أو من عدد كبير من المعادلات، ولكي يكون لنموذج قابلاً للحل، لا بد أن تكون عدد المعادلات الهيكلية مساوياً لعدد المعلمات الموجودة في النموذج.

يمكن تمثيل النموذج الاقتصادي بمخطط لمكوناته، وهو موضح في الشكل 1.7



شكل 1.7

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner