6-6-1: المعادلات التفاضلية الخطية (Linear Differential Equations):

تعريف :

المعادلة التفاضلية $F(x,y,y',\dots\dots y^n)=0$ تسمى خطية اذا كانت F دالة خطية في المتغيرات $(y,y',\dots\dots\dots y^n)$ وبالتالي تكون الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية الخطية من الرتبة n على النحو الاتي :

$$a_o(x)y^n+a_1(x)y^n+\cdots\ \dots\dots.+a_n(x)y=g(x)$$

واي معادلة تفاضلية لاتكون على هذه الصورة فإنها تكون غير خطية . فمثلا المعادلة التفاضلية

$y'''+2e^xy''+yy'=x^4$ غير خطية لوجود (yy') أما $(y''+y=0)$ فهي خطية .

والصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة الاولى هي :

$$y'+p(x).y=Q(x)\dots\dots..(1)$$

حيث ان $(Q(x)\ ,p(x))$ دوال متصلة في x ومعامل y' يساوي الوحده وإذا كانت حالة خاصة $Q(x)=0$ فتؤول المعادلة (1) الى الصوره :

$$y'+p(x).y=0\dots\dots\dots\dots(2)$$

تسمى المعادلة (2) بالمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة أما المعادلة التفاضلية رقم (1) فهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة ومن السهل مكاملة المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (2) وذلك بفصل المتغيرات وكالاتي:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

وبتكامل الطرفين نجد :

$$\ln(y)=-\int p(x)dx+\ln(c)$$

وبأخذ e للطرفين نجد :

$$y=ce^{-\int p(x)dx}$$

ولحل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (1) فإننا نقوم بإيجاد معامل التكامل . ولذلك دعنا نكتب المعادلة (1) على الشكل

$$[P(x)y-Q(x)]\,dx+dy=0$$

إذن :

$$M(x,y)=p(x)y-Q(x)\qquad,\qquad N(x,y)=1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \qquad , \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

إذن باستخدام العلاقة (***I***) نجد ان :

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{dN}{dx}\right) \cdot g}{N} = P(x)$$

$$\frac{dg}{dx} = P(x). g$$

ومنها :

$$\int \frac{dg}{g} = \int P(x) dx$$

$$\ln(g) = \int P(x) dx$$

وبأخذ e للطرفين ينتج :

$$g = e^{\int P(x) dx}$$

وهذا يبين لنا أن ($g = e^{\int P(x)dx}$) يمثل المعامل التكاملي للمعادلة (1) . دعنا الان نضرب معادلة (1) في هذا المعامل فنجد ان :

$$e^{\int P(x)dx}(y' + P(x)\, y\,) = e^{\int P(x)dx}\ .\ \ Q(x) \ldots \ldots \ldots (3)$$

وحيث ان :

$$\frac{d\ \int P(x) dx}{dx} = P(x)$$

فإن هذه المعادلة (3) يمكن كتابتها كالآتي :

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} . y\right) = e^{\int P(x)dx}\ .\ \ Q(x)$$

ويمكننا التحقق من ذلك بتفاضل حاصل ضرب الدالتين $(e^{\int P(x)dx} . y)$.

وبتكامل الطرفين نحصل على : (كتبي : 44)

$$y e^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}\ .\ Q(x) dx + c$$

وبقسمة كل من الطرفين على ($e^{\int (x)dx}$) نحصل على صيغة الحل العام للمعادلة (1) كالآتي :

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}\ .\ Q(x) dx + c\right] \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

ملاحظة :

المعامل التكاملي $g(x) = e^{\int P(x)dx}$ يستـــــخدم فقـــط في المعادلات التفاضلية الخطية التي فيها , معـــامـل $\frac{d}{dx}$ يساوي الوحدة ولذلك يجب جعل معامل $\frac{dy}{dx}$ هو الوحـــدة .

Example: solve the differential equation

$$\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)\frac{dy}{dx} + 2y = \tan(x)$$

عندما : y(0)=0

Solution:

بضرب طرفي المعادلة في ($\tan(x)$) نجد انه :

$$\frac{dy}{dx} + 2y\tan(x) = tan^2(x)$$

إذن: $P(x) = 2\tan(x) \qquad , \qquad Q(x) = tan^2(x)$

إذن معامل التكامل يكون :

$$g(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2\tan(x)dx} = e^{-2\ln|\cos(x)|} = sec^2(x)$$

وبالتعويض في الصورة العامة للحل في (4) نجد ان :

$$y(x) = \frac{1}{sec^2(x)}\left[\int sec^2(x)\, tan^2(x)dx + c\right]$$

$$y(x) = \frac{1}{sec^2(x)} \cdot \frac{tan^3(x)}{3} + \frac{c}{sec^2(x)}$$

$$y(x) = \frac{1}{3}\, cos^2(x)\, tan^3(x) + c\ \ cos^2(x)$$

وباستخدام الشرط المعطاة وهي $y = 0$ عندما x=0 نجد ان c=0

ومن ثم فالحل الخاص يكون على الصورة : (كتبي:49)

$$y(x) = \frac{1}{3}cos^2(x)\, tan^3(x)$$

7-1: المعادلات التي تؤول الى معادلات خطية

:(Equations That Lead To Linear Equation)

7-1: معادلة برنولي (Bernoulli's Equation) :

معادلة برنولي هي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى وصورتها العامة هي :

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\,y^{n} \ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث ان (n) عدد ثابت أكبر من الصفر . (في حالة n=0 فتؤول المعادلة (1) الى المعادلة الخطية السابق التعامل معها) , ($P(x)$, $Q(x)$) دالتين متصلتين في x أو ثابتان وتؤول هذه المعادلة الى المعادلة الخطية وذلك بأجراء التحويل الاتي:

بقسمة جميع حدود المعادلة على (y^{n}) نحصل على :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x)\ldots\ldots\ldots(2)$$

ثم نجري التعويض :

$$Z=y^{1-n}$$

ومنها :

$$\frac{dZ}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

وبالتعويض في (2) نجد ان :

$$\left(\frac{1}{1-n}\right)\frac{dz}{dx}+P(x).Z=Q(x)$$

اي انه:

$$\frac{dz}{dx}+(1-\mathrm{n})P(x)\,.Z=(1-n).Q(x)$$

و هذه معادلة تفاضلية تحل كما في البنـــد الســـــابق

$Example: solve\ the\ differential\ equation$ $\frac{dy}{dx}+2y=y^{2}e^{x}$

Solution :

بالقسمة على (y^{2}) نحصل على :

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+2y^{-1}=e^{x}\ldots\ldots\ldots(1)$$

بوضع $Z = y^{-1}$ ومنها

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

وبالتعويض في (1) نحصل على :

$$-\frac{dz}{dx} + 2Z = e^{x}$$

$$\frac{dz}{dx} - 2Z = -e^{x}$$

إذن معادلة تفاضلية خطية وبالتالي تكون :

$$P(x) = -2 \qquad , \qquad Q(x) = -e^{x}$$

إذن معامل التكامل هو : $g = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$

إذن $Z = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} . Q(x)dx + c\right]$

$$Z = e^{2x}\left[\int e^{2x}. e^{x}\,dx + c\right]$$

$$Z = e^{2x}(e^{-x} + c)$$

$$Z = e^{x} + ce^{2x} = \frac{1}{y}$$

اذن حل المعادلة التفاضلية المعطاة يكون :

$$y = \frac{e^{-x}}{(1 + ce^{x})}$$