3-4-1 : الحل المنفرد:

يظهر لبعض المعادلات حل ليس من مجموعة الحل العام هذا الحل يسمى بالحل المنفرد

Example: $2y' = 3y^{\frac{1}{8}}$

واذا قمنا بحل هذه المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات $3dx = \frac{2dy}{y^{\frac{1}{8}}}$, $y \neq 0$ تكون عملية الفصل ممكنة اذا كان $y \neq 0$

$$y' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{dy}{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}} = \frac{dx}{1} \rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{3}{2}y^{-\frac{1}{3}}dy \rightarrow y^{\frac{2}{3}} = (x+c)$$

$^2 = (x+c)^3)$, $x + c > 0$ الحل العام (general solution)

اما اذا كان y=0 فلا يمكن اجراء عملية الفصل علما انه يحقق المعادلة التفاضلية وهو لا ينتمي الى مجموعة الحل العام ($y^2 = (x+c)^3$) لاي قيمة ل c لذلك يكون الحل منفرد.

1-1 : ملاحظات:

1 – قد يكون للمعادلة التفاضلية حل وحيد (Unique Solution) , وقد يوجد لها حلول عديدة (Many Solution) , وقد لا يوجد لها حل على الاطلاق .

2 – من الممكن ان يكون الحل في الصورة الصريحة y=f(x) ومن الممكن ان يكون الحل في الصورة الضمنية *f(x,y)=0*

ومن الممكن ان يكون الحل في الصورة البارامترية $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

5-1 : تصـــنيف المعـــادلات التفاضـــلية (رتبـــة ودرجـــة) المعـــادلة التفاضـــــلية

1-5-1 : رتبة المعادلة التفاضلية :

اذا كانت المشتقة النونية $y^{(n)}$ هي اعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية العادية قيل ان هذه المعادلة من الرتبة(n)

ويمكن ايضاح ذلك من خلال الامثلة التالية :

$1)\ y' - 2y = 0$ الرتبة الاولى

$2)\ x^2y'' + xy' + x^2y = e^x \sin x$ الرتبة الثانية

$3) 2y''' + x^2 \quad ' - y' = -x$ الرتبة الثالثة

2-5-1 : درجة المعادلة التفاضلية :

هي الاس المرفوع اليها أعلى مشتقة بالمعادلة التفاضلية , وقبل تحديد درجة المعادلة التفاضلية يجب وضعها على صورة قياسية وصحيحة من حيث المشتقات . ويمكن ايضاح ذلك من خلال الامثلة التالية:

$1)\ 1 + (\frac{dy}{dx})^2 = (3\frac{d^2y}{dx^2} + xy)^2$ الدرجة الثانية

$2)\ 9(\frac{d^2y}{dx^2})^3 + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 + x^2y^2 - 1 = 0$ الثالثة الدرجة

$3)\ y'' - 7(y')^2 - 3xy = x$ الاولى الدرجة

2-1: ملاحظة :

هناك بعض المعادلات التي لا يمكن تحديد درجتها الابعد وضعها على صورة خالية من الجذور:

$Example\!: \left[1 + (\frac{dy}{dx})^2\right]^{\frac{1}{2}} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$

Solution:

$1 + (\frac{dy}{dx})^2 = \left(-3\frac{d^2y}{dx^2} - xy\right)^2$ بتربيع الطرفين

$$1 + (\frac{dy}{dx})^2 = 9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y^2$$

$$\rightarrow 9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y^2 - 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

6-1 : طرق حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى

: (First order linear differential equations and First degree)

يوجد صيغتان اساسيتان من المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى و هما

$$i)\ \frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad ii)\ M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

وفيما يلي سوف نرى انه يمكن كتابة اي من الصيغتين بدلالة الصيغة الاخرى ونفترض تحقق الشروط و وجود الحلول

1-6-1: طريقة فصل المتغيرات (separating variables):

1-1-6-1 :الطريقة المباشرة:

اذا امكن كتابة المعادلة التفاضلية من الرتبة والدرجة الاولى على الصورة التالية :

$$f(x)dx = f(y)dy \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حيث ان f(x) دالة بدلالة x فقط ودالة f(y) بدلالة y فأننا نقول في هذه الحالة ان المتغيرات منفصلة .
وتحل هذه المعادلات بتكامل الطرفين مع اضافة ثابت التكامل الاختياري لأي من الطرفين وبذلك يكون الحل للمعادلة الاولى هو :

$$\int f(x)dx = \int f(y)dy \ \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Example: *Find the general solution and the special curve that passes through the point* $(0,0)$ *For the differential equation*

$$e^x \cos y\, dx + (1+e^x)\sin y\, dy = 0$$

Solution :

يمكن فصل متغيراتها وذلك بقسمة طرفي المعادلة التفاضلية على $(1+e^x)\cos y$ فنحصل على:

$$\frac{e^x}{1+e^x}dx + \frac{\sin y}{\cos y}dy = 0$$

وبالتكامل المباشر: $\ln(1+e^x) - \ln(\cos y) = c$

استخدام خواص ln اخذه للطرفين $\ln\left(\frac{1+e^x}{\cos y}\right) = c$

تبسيط الحل $\frac{1+e^x}{\cos y} = c$

و بذلك يكون الحل العام هو :

$$1 + e^x = c|\cos y|$$

و بالتعويض عن x=0 وy=0 فأن:

c=0

ويكون الحل الخاص :

$$1 + e^x = 2|\cos y|$$

2-1-6-1:طريقة التعويض :

أذاكانت المعادلة التفاضلية على الصورة التالية :

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad \text{او} \quad \frac{dy}{dx} = f(ax + by)$$

فانه يمكن اختزالها الى معادلة تفاضلية مفصولة متغيراتها (فصل المتغيرات) ولهذا نفترض أن :

$$ax + by + c = z \quad \text{او} \quad ax + by = z$$

(العويضي:26,24)

وتتضح هذه الحالة من خلال المثال التالي :

Example: $\frac{dy}{dx} = 2x + y$

Solution :

بفرض $(z = 2x + y)$ نجد ان : $(\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx})$ أو $(\frac{dz}{dx} = 2 + z)$ وبفصل المتغيرات نجد :

$$\frac{dz}{(z+2)} = dx$$

$$\int \frac{dz}{(z+2)} = \int dx$$

$$\ln(z+2) = x + c$$

$$z + 2 = e^{x+c}$$

$$z = e^{x+c} - 2$$

$$2x + y = e^{x+c} - 2 \quad \text{او} \quad y = e^{x+c} - 2 - 2x$$