الجامعة	الانبار
الكلية	العلوم
القسم	الرياضيات
المرحلة	الرابعة
اسم المادة باللغة العربية	بحوث العمليات
اسم المادة باللغة الانكليزية	Operation Research
اسم التدريسي	علي كاظم يعقوب
عنوان المحاضرة باللغة العربية	تحليل ماركوف
عنوان المحاضرة باللغة الإنكليزية	Markov analysis
رقم المحاضرة	12

تحليل ما ركوف

يستخدم تحليل ماركوف في د راسة تحولات السوق من حيث المكسب والخسارة بين عدة ماركات مختلفة .وتتكون عناصر سلاسل ماركوف من نوعين من المصفوفات:

1- مصفوفة الحصص أو توزيع العملاء أو النصيب، وهذه تكون في بداية الفترة.

2- مصفوفة التحولات التي توضح المكسب والخسارة.

اولا : مصفوفة الحصص او النصيب

ولها أربعة أشكال:

1- جاهزة وتكون في شكل عشري ومجموع الاحتمالات يجب أن يساوي واحد

صحيح:

الماركات $\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} = 1$

او $\begin{bmatrix} A & B & C \\ 20\% & 30\% & 50\% \end{bmatrix} = 100$

فنقوم بصاغتها بالشكل

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} = 1$$

2- احد النسب مجهولة $\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.3 & 0.3 & ? \end{bmatrix} = 1$

نستنتج ان? هي 0.4

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} = 1$$

3- او تاتي بدل من النسب عدد صحيح للعملاء كالتالي :

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 2000 & 3000 & 5000 \end{bmatrix} = 10000$$

فنقوم بقسمة كل عميل للماركة على إجمالي العملاء لإيجاد الاحتمالات كالتالي:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ \frac{2000}{10000} & \frac{3000}{10000} & \frac{5000}{10000} \end{bmatrix}$$

يصبح الناتج كالتالي:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} = 1$$

4- قد لا تأتي مصفوفة النصيب بالمرة في المسألة، فنقوم بتقسيم واحد على عدد

الماركات كالتالي

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = 1$$

أو في حالة ثلاثة ماركات:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.33 & 0.33 & 0.33 \end{bmatrix} = 1$$

في حالة أربع ماركات

$$\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} = 1$$

وهكذا...

ثانيا مصفوفة التحولات

ولها أربع أشكال أيضًا:

1- جاهز ة :وتأتي في شكل عشري، ويجب أن تكون مجموع الاحتمالات لكل ماركة يساوي واحد صحيح.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ =1 \\ =1 \\ =1 \end{array}$$

2- أحد أو بعض الاحتمالات مجهولة

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.3 & 0.2 & ? \\ ? & 0.4 & 0.5 \\ 0.8 & ? & 0.1 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ =1 \\ =1 \\ =1 \end{array}$$

فتكون كالتالي:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ =1 \\ =1 \\ =1 \end{array}$$

3- قد تأتي في شكل لفظي، ثم نقوم بملأ المصفوفة حسب المطلوب أو حسب ترجمة الألفاظ أو المعطيات، ومن أجل أن تملأ أو تكمل المصفوفة لابد من معرفة الآتي:

أ -احتفاظ أو ولاء أي ماركة (تقاطع صف هذه الماركة مع عمودها). اي تكون الارقام عبارة عن قطر المصفوفة.

ب -خسارة ماركة من ماركة أخرى(تقاطع صف الماركة الأولى مع عمود الماركة الثانية). اي الرقم يكون في الصف

ج -مكسب ماركة من أخرى (تقاطع عمود الماركة الأولى مع صف الماركة الثانية). اي الرقم يكون في عمود

د -يعبر صف المصفوفة عن الخسارة للماركة، ومجموع احتمالاته تساوي واحد.

ه -يعبر عمود المصفوفة عن مكسب الماركة، ولا نجمع احتمالاته.

مثال رقم (1)

1- إذا كانت نسبة مكسب الماركة B من الماركة A ضعف نسبة الماركة C من الماركة A .

2- نسبة احتفاظ الماركة A = 79%

3- نسبة احتفاظ الماركة B = 75%

4- نسبة خسارة الماركة B من الماركة C = 20%

5- نسبة مكسب الماركة B من الماركة من C = 4%

6- نسبة احتفاظ الماركة C = 91%

المطلوب:

أوجد مصفوفة التحولات للماركات الثلاثة A ,B, C

حل مثال رقم (1)

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.79 & ? & ? \\ ? & 0.75 & 0.20 \\ ? & 0.04 & 0.91 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ =1 \\ =1 \\ =1 \end{array}$$

نسبة خسارة C من A = 1- (0.91+ 0.04) =0.05

نسبة خسارة ل B من A = 1- (0.20+ 0.75) =0.05

نسبة (B + C) = (1- 0.79) =0.21

بما ان مكسب B من A ضعف مكسب C من A اذا مكسب B ضعف C اذا B الى C

1 : 2 مجموع النسب =1+2=3

نصيب $B = \frac{0.21}{3} = 0.07 \times 2 = 0.14$

نصيب $C = \frac{0.21}{3} = 0.07 \times 1 = 0.07$

اذا تكون مصفوفة التحولات للماركات الثلاثة كتالي

$$\begin{matrix} & A & B & C \\ A & 0.79 & 0.14 & 0.07 \\ B & 0.05 & 0.75 & 0.20 \\ C & 0.05 & 0.04 & 0.91 \end{matrix} \begin{matrix} \\ =1 \\ =1 \\ =1 \end{matrix}$$

مثال (2)

بالرجوع إلى المثال السابق (1) وبفرض أن الجدول التالي يوضح توزيع العملاء في بداية الفترة من 2020/4/1 على ثلاث ماركات هي A,B,C كالاتي :

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 16000 & 14000 & 20000 \end{bmatrix} = 50000$$

المطلوب :أوجد عدد ا لعملاء المتوقع في 2020/5/1 بافتراض أن عدد العملاء ثابت في السوق.

الحل مثال (2)

1- مصفوفة النصيب 2020/4/1

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ \frac{16000}{50000} & \frac{14000}{50000} & \frac{20000}{50000} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.32 & 0.28 & 0.4 \end{bmatrix} = 1$$

2- مصفوفة التحولات التي حصلنا عليها في المثال السابق هي:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.79 & 0.14 & 0.07 \\ 0.05 & 0.75 & 0.20 \\ 0.05 & 0.04 & 0.91 \end{bmatrix}$$

3- إيجاد عدد العملاء في 2020/5/1

عدد العملاء = النصيب في الشهر السابق X مصفوفة التحولات

$$\begin{bmatrix} 0.32 & 0.28 & 0.4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.79 & 0.14 & 0.07 \\ 0.05 & 0.75 & 0.20 \\ 0.05 & 0.04 & 0.91 \end{bmatrix}$$

نصيب A = $(0.32 \times 0.79) + (0.28 \times 0.05) + (0.4 \times 0.05) = 0.2868$

نصيب B = $(0.32 \times 0.14) + (0.28 \times 0.75) + (0.4 \times 0.04) = 0.2708$

نصيب C = $(0.32 \times 0.07) + (0.28 \times 0.20) + (0.4 \times 0.91) = 0.4424$

∴ نصيب الماركات من العملاء في 5/1 هو

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.2868 & 0.2708 & 0.4424 \end{bmatrix} = 1$$

وبضرب النسب في حجم العملاء 50000 عميل نحصل على نصيب العملاء في 2020/5/1 لكل ماركة كالتالي :

A	B	C
0.2868×50000	0.2708×50000	0.4424×50000

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 14340 & 13540 & 14340 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{عميل}$$

- الشكل الرابع لمصفوفة التحولات

يعطى بالتمرين مصفوفة النصيب في أول الفترة وكذلك مصفوفة النصيب في آخر الفترة (أي مصفوفتين نصيب) وتكون واحدة لبداية الفترة والثانية للفترة اللاحقة لها .بالإضافة إلى جدول يحتوي على مكسب وخسارة احتفاظ للماركات.

خطوات ملأ الجدول والوصول إلى مصفوفة التحولات في شكل عشري:

1- إذا كانت الخسارة موزعة نقوم بجمعها مع إهمال خانة الاحتفاظ في كل صف.

2- إذا كانت الخسارة إجمالية نوزعها أيضًا مع إهمال خانة الاحتفاظ في كل صف.

3- إذا كان المكسب موزع نقوم بجمعه مع إهمال خانة الاحتفاظ في العمود.

4- إذا كان المكسب إجمالي نقوم بتوزيعه مع إهمال خانة الاحتفاظ في العمود.

5-احتفاظ أي ماركة = نصيب الماركة في بداية الفترة – خسارة الماركة.

6- النصيب في الفترة اللاحقة (في نهاية الفتر ة) = النصيب في بداية الفترة + (مكسب الماركة – خسارة الماركة).

7- النصيب في الفترة اللاحقة = النصيب في الفترة السابقة × صفوفة التحولات.

8- بعد أن يتم ملأ خانات الجدول أو مصفوفة التحولات نقوم بجمع قيم كل صف ثم نقسم كل قيمة في الصف على مجموع قيم الصف لتكون عشرية .ويجب أن يكون الناتج هو نفس أرقام مصفوفة بداية الفترة.

مثال (3)

بلغ إجمالي عدد العملاء لصنف استهلاكي 50000 عميل في الفترة ما بين 2020/4/1, 2020/5/1 وكان توزيع العملاء على ثلا ث ماركات كالتالي :

النوع	اجمالي خسارة	A	B	C	النصيب في 4/1	النصيب في 5/1
A	1500	?	500	?	34%	38%
B	?	1500	?	1200	43%	42%
C	?	?	?	?	23%	20%
اجمالي المكسب	?	?	2300	?	100%	100%

المطلوب:

حساب توزيع العملاء في 2020/6/1 بافتراض ثبات عدد العملاء خلال هذا العام؟

حل مثال (3)

1- يتم تحويل مصفوفة النصيب في بداية الفترة ونهاية الفترة إلى شكل توزيع العملاء، وذلك بضرب عدد أو العملاء ×كل نسبة من نسب مصفوفة النصيب

كالتالي:

مصفوفة النصيب في 4/1 بداية الفترة $\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.34 & 0.43 & 0.23 \end{bmatrix} = 1$

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.34 & 0.43 & 0.23 \end{bmatrix} \times 50000$$

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 17000 & 21500 & 11500 \end{bmatrix}$$

مصفوفة النصيب في 5/1 نهاية الفترة $\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.38 & 0.42 & 0.20 \end{bmatrix} = 1$

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.38 & 0.42 & 0.40 \end{bmatrix} \times 50000$$

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 19000 & 21000 & 10000 \end{bmatrix}$$

2- نبدأ بعد ذلك في ملأ خانات الجدول بتطبيق القواعد السابقة: نقوم بتحديد احتفاظ أو ولاء أي ماركة لجميع الماركات ونهملها مؤقتًا (والاحتفاظ للماركة هو تقاطع صف مع عمود الماركة)

النوع	اجمالي خسارة	A	B	C	النصيب في 4/1	النصيب في 5/1
A	1500	?	500	?	34%	38%
B	?	1500	?	1200	43%	42%
C	?	?	?	?	23%	20%
اجمالي المكسب	?	?	2300	?	100%	100%

وباستخدام القواعد السابقة نقوم بايجاد باقي الفراغات

احتفاظ الماركة A= نصيب الماركة في بداية الفترة – خسارة الماركة.

=17000-1500=15500

احتفاظ الماركة B= نصيب الماركة في بداية الفترة – خسارة الماركة.

=21500-2700=18800

النوع	اجمالي خسارة	A	B	C	النصيب في 4/1	النصيب في 5/1
A	1500	?	500	1000	34%	38%
B	2700	1500	?	1200	43%	42%
C	?	?	1800	?	23%	20%
اجمالي المكسب	?	?	2300	2200	100%	100%

احتفاظ أي ماركة = عدد عملاء مصفوفة النصيب لهذه الماركة في بداية الفترة –ا جمالي الخسارة لهذه الفترة

النوع	اجمالي خسارة	A	B	C	النصيب في 4/1	النصيب في 5/1
A	1500	15500	500	1000	34%	38%
B	2700	1500	18800	1200	43%	42%
C	?	?	1800	?	23%	20%
اجمالي المكسب	?	?	2300	2200	100%	100%

نصيب أي ماركة في نهاية الفترة = نصيب هذه الماركة في بداية الفترة +إجمالي مكسب هذه الماركة – إجمالي خسارة هذه الماركة

النوع	اجمالي خسارة	A	B	C	النصيب في 4/1	النصيب في 5/1
A	1500	15500	500	1000	34%	38%
B	2700	1500	18800	1200	43%	42%
C	3800	2000	1800	?	23%	20%
اجمالي المكسب	8000	3500	2300	2200	100%	100%

احتفاظ أي ماركة = عدد عملاء مصفوفة النصيب لهذه الماركة في بداية الفترة - إجمالي الخسارة لهذه الماركة

النوع	اجمالي خسارة	A	B	C	النصيب في 4/1	النصيب في 5/1
A	1500	15500	500	1000	34%	38%
B	2700	1500	18800	1200	43%	42%
C	3800	2000	1800	7700	23%	20%
اجمالي المكسب	8000	3500	2300	2200	100%	100%

3- تحويل مصفوفة التحولات الى مصفوفة الشكل العشري

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} A & B & C \\ \frac{15500}{17000} & \frac{500}{17000} & \frac{1000}{17000} \\ \frac{1500}{21500} & \frac{18800}{21500} & \frac{1200}{21500} \\ \frac{2000}{11500} & \frac{1800}{11500} & \frac{7700}{11500} \end{bmatrix}$$

نحصل غلى مصفوفة التحولات الاتية

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.91 & 0.03 & 0.06 \\ 0.07 & 0.87 & 0.06 \\ 0.17 & 0.16 & 0.67 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ =1 \\ =1 \\ =1 \end{array}$$

4- ايجاد عدد العملاء 6/1

$$\begin{bmatrix} 0.38 & 0.42 & 0.20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.91 & 0.03 & 0.06 \\ 0.07 & 0.87 & 0.06 \\ 0.17 & 0.16 & 0.67 \end{bmatrix}$$

نصيب A 0.4092 =

نصيب B 0.4088 =

نصيب C 0.182 =

اذا نصيب الماركات العملاء 6/1

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.4092 & 0.4088 & 0.182 \end{bmatrix} = 1$$

وبضرب النسب في حجم العملاء 50000 عميل نحصل على نصيب العملاء في 6/1 لكل ماركة كالتالي :

$$\begin{matrix} A & B & C \\ 0.4092 \times 50000 & 0.4088 \times 50000 & 0.182 \times 50000 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 20460 & 204400 & 9100 \end{bmatrix}$$