جامعة الانبار

كلية التربية الأساسية / حديثة

قسم العلوم العامة / فرع الفيزياء

اسم التدريسي: م.م. عبدالرحمن ظافر صباح

المرحلة الدراسية: الثالثة

الفصل الدراسي: الاول

اسم المادة باللغة العربية: ميكانيك الكم

اسم المادة باللغة الإنكليزية: Quantum Mechanics

اسم المحاضرة باللغة العربية: التفاوت ورموز ديراك

اسم المحاضرة باللغة الإنكليزية:

Variance and Dirac Notations

2-9- التفاوت(variance)

التفاوت هو مقدار الانحراف بقيمة نتيجة عملية القياس عن القيمة المتوقعة لذلك المؤثر ويمثل رياضيا بجذر معدل مربع الانحراف عن القيمة المتوقعة:

$$\Delta A = \sqrt{\left\langle A^2 \right\rangle - \left\langle A \right\rangle^2}$$

مثال: اجبر جسيم حر بدالة موجة $\psi(x) = e^{ikx}$ على الحركة في الفترة $0 \leq x \leq 1$ وان $\psi(x) = 0$ فيما عدا ذلك، جد احتمالية وجود الجسيم في الفترة [0.25,0.75] ثم جد التفاوت للموقع ؟

الحل:

$$p = \int \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_{0.25}^{0.75} e^{-ikx} e^{ikx} dx = \int_{0.25}^{0.75} dx = 0.5$$

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \left\langle x \right\rangle^2$$

$$\left\langle x \right\rangle^2 = \left[\int \psi^* x \psi dx\right]^2 = \left[\int_0^1 e^{-ikx} x e^{ikx} dx\right]^2 = \left[\int_0^1 x dx\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \int \psi^* x^2 \psi dx = \int_0^1 e^{-ikx} x^2 e^{ikx} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (\Delta x)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

مثال/ جسيم كتلته(m) في صندوق أحادي البعد وجد أنه في الحالة الأرضية :

$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi x}{a})$ أوجد: 1- Δx 2- Δp ؟

الحل/

$$\langle \Delta p\rangle^2=\left[\int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi x}{a})\hat{p}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi x}{a})\,dx\right]^2$$

$$\langle \Delta p\rangle^2=\frac{2}{a}\left[\int_0^a \sin(\frac{\pi x}{a})\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\sin(\frac{\pi x}{a})\right)dx\right]^2$$

$$\langle \Delta p\rangle^2=\frac{2}{a}\left[\int_0^a \sin(\frac{\pi x}{a})\left(-i\hbar\frac{\pi}{a}\cos(\frac{\pi x}{a})\right)dx\right]^2=\frac{-2\pi i\hbar}{a^2}\left[\int_0^a \sin(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi x}{a})\,dx\right]^2$$

$$\langle \Delta p\rangle^2=0$$

$$\langle \Delta p^2\rangle=\int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi x}{a})\hat{p}^2\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi x}{a})\,dx$$

$$\langle \Delta p^2\rangle=\frac{2}{a}\int_0^a \sin(\frac{\pi x}{a})\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}\sin(\frac{\pi x}{a})\right)dx=\frac{2}{a}\int_0^a \sin(\frac{\pi x}{a})\left(-\hbar^2\frac{d}{dx}\frac{\pi}{a}\cos(\frac{\pi x}{a})\right)dx$$

$$\langle \Delta p^2\rangle=\frac{+2}{a}\int_0^a \sin(\frac{\pi x}{a})\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\sin(\frac{\pi x}{a})\right)dx=\frac{+2}{a}\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\int_0^a \sin^2(\frac{\pi x}{a})\,dx$$

$$\langle \Delta p^2\rangle=\frac{+2\pi^2\hbar^2}{a^3}\int_0^a \frac{1}{2}\left(1-\cos(\frac{2\pi x}{a})\right)dx=\frac{\pi^2\hbar^2}{a^3}\left[x-0\right]_0^a$$

$$\langle \Delta p^2\rangle=\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

$$\therefore \Delta p=\sqrt{\langle \Delta p^2\rangle-\langle \Delta p\rangle^2}=\sqrt{\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}}=\frac{\pi\hbar}{a}$$

$$\left\langle \Delta x \right\rangle^2 = \left[\int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi x}{a}) x \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi x}{a})\, \mathrm{dx} \right]^2 = \left[\frac{2}{a} \int_0^a x \sin^2(\frac{\pi x}{a})\, \mathrm{dx} \right]^2$$

$$\left\langle \Delta x \right\rangle^2 = \frac{2}{a} \frac{a^2}{4} = \frac{a}{2}$$

$$\left\langle \Delta x^2 \right\rangle = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi x}{a}) x^2 \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi x}{a})\, \mathrm{dx} = \frac{2}{a} \int_0^a x^2 \sin^2(\frac{\pi x}{a})\, \mathrm{dx}$$

$$\left\langle \Delta x^2 \right\rangle = \frac{a^2}{6} \left(2 - \frac{3}{\pi^2} \right)$$

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle \Delta x^2 \right\rangle - \left\langle \Delta x \right\rangle^2}$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{a^2}{6} \left(2 - \frac{3}{\pi^2} \right) - \frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{a^2(\pi^2 - 6)}{12\pi^2}} = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12}}$$

10-2-مصطلح (رموز) ديراك Dirac notations

ان مصطلح (رموز) ديراك هي مصمم خصيصًا لتسهيل أنواع الحسابات التي تظهر كثيرًا في ميكانيكا الكم، إذ أن استخدامه في ميكانيكا الكم واسع الانتشار، ويتم شرح العديد من الظواهر التي يتم شرحها باستخدام ميكانيكا الكم باستخدام تدوين براكيت..

يُطلق عليه براكيت وذلك لانه يُشار إليه بقوس، حيث أن ⟨Φ | Ψ⟩ يتألف من الجزء الأيسر ⟨Φ| ، ويسمى برا والجزء الأيمن |Ψ⟩ تسمى الكيت، إذ أن الفرق بين برا وكيت هو، إذا كان قوس الزاوية يشير إلى اليسار مثل ⟨a | فهو برا ناقلات صف، وإذا كان قوس الزاوية يشير إلى اليمين مثل |a⟩ فهو كيت أي ناقلات العمود حيث يمكن كتابتها كالتالي:

$$\int \psi^* \psi dv = \langle \psi | \psi \rangle$$ ....(bracket) براكيت

$$\int \psi^* \psi dv = \langle \psi | \psi \rangle$$

$\psi \Rightarrow |\psi\rangle \Rightarrow ket$ الكيت هي دائماً عمود

$\psi^* \Rightarrow \langle \psi | \Rightarrow bra$ البرا هي دائما صف

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \quad \Rightarrow \text{orthogonal} \\ 1 & n = m \quad \Rightarrow \text{normalizaion} \end{cases}$$

مثال/ ضع في اعتبارك المستويات $|\psi\rangle = 3i\,|\phi_1\rangle - 7i\,|\phi_2\rangle$ و

$|\chi\rangle = -|\phi_1\rangle + 2i\,|\phi_2\rangle$ حيث $|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ هي orthonormal :

1- اوجد $|\psi + \chi\rangle$ و $\langle \psi + \chi|$ ؟ 2- اوجد $\langle \psi | \chi \rangle$ و $\langle \chi | \psi \rangle$؟

الحل/

اولا:

$$|\psi + \chi\rangle = |\psi\rangle + |\chi\rangle = (3i\,|\phi_1\rangle - 7i\,|\phi_2\rangle) + (-|\phi_1\rangle + 2i\,|\phi_2\rangle)$$
$$= (-1 + 3i)|\phi_1\rangle - 5i\,|\phi_2\rangle$$

$$\langle \psi + \chi| = (-1 - 3i)\langle \phi_1| + 5i\,\langle \phi_2|$$

ثانيا:

$$\langle \phi_1 | \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle = 1$$

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \psi | = -3i \, \langle \phi_1 | - 7i \, \langle \phi_2 |$$

$$| \chi \rangle = -| \phi_1 \rangle + 2i \, | \phi_2 \rangle$$

$$\langle \psi | \chi \rangle = \left(-3i \, \langle \phi_1 | + 7i \, \langle \phi_2 | \right) \left(-| \phi_1 \rangle + 2i \, | \phi_2 \rangle \right)$$

$$\langle \psi | \chi \rangle = +3i \, -14$$

$$\langle \psi | \chi \rangle = -14 + 3i$$

$$\langle \chi | \psi \rangle = \left(-\langle \phi_1 | - 2i \, \langle \phi_2 | \right) \left(+3i \, | \phi_1 \rangle - 7i \, | \phi_2 \rangle \right)$$

$$\langle \chi | \psi \rangle = -3i \, -14$$

$$\langle \chi | \psi \rangle = -14 - 3i$$

مثال/أظهر أن المتجهات متعامدة $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ، $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. وهل $|\psi\rangle$ معيره ؟

الحل/

$$\langle\phi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

H.W/ ضع في اعتبارك المستويات $|\psi_1\rangle = 2i\,|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle - a|\phi_3\rangle + 4|\phi_4\rangle$ و $|\psi_2\rangle = 3|\phi_1\rangle - i\,|\phi_2\rangle + 5|\phi_3\rangle - |\phi_4\rangle$ حيث $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$

هي orthonormal ket و (a)هو ثابت. جد قيمة (a) حيث $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ هي (orthogonal)