جامعة الانبار

كلية التربية الأساسية / حديثة

قسم العلوم العامة / فرع الفيزياء

اسم التدريسي: م.م. عبدالرحمن ظافر صباح

المرحلة الدراسية: الثالثة

الفصل الدراسي: الاول

اسم المادة باللغة العربية: ميكانيك الكم

اسم المادة باللغة الإنكليزية: Quantum Mechanics

اسم المحاضرة باللغة العربية: القيمة الذاتية والدالة الذاتية

اسم المحاضرة باللغة الإنكليزية:

Eigenvalue and Eigen function

6-2- القيمة الذاتية والدالة الذاتية (Eigenvalue and Eigen function):

لكل مؤثر خطي مجموعة لانهائية من الدوال الذاتية والقيم الذاتية

$$A\Psi_n(x)=a_n\Psi_n(x) \quad ....(1)[\text{معادلة القيمة الذاتية}]$$

حيث انه A: مؤثر ، $\Psi_n(x)$: دالة ذاتية ، a_n : قيمة ذاتية (قيمة مقاسة)

التفسير الفيزيائي لمعادلة القيمة الذاتية هو ان المؤثر A يقوم بقياس الصفة الفيزيائية التي يمثلها النظام الموصوف بدالة الموجة $\Psi_n(x)$ والمتواجد في الحالة الكمية (n) وان نتيجة عملية القياس هي القيمة الذاتية a_n .

أي انه مثلاً عندما يوثر مؤثر الزخم على النظام الموصوف بالدالة والموجدة في الحالة الكمية(n) فأنه يقوم بقياس الزخم للنظام في تلك الحالة.

مثال / باستخدام معادلة القيمة الذاتية اثبت ان $\Psi_n(x)=e^{i4x}$ هي دالة ذاتية للمؤثر $A=\frac{\partial}{\partial x}$ ؟

$$A=\frac{\partial}{\partial x}..........(1)$$

$$\Psi_n(x)=e^{i4x}..............(2)$$

$$A\Psi_n(x)=a_n\Psi_n(x)...........(3)$$

$$A\Psi_n(x)=\frac{\partial}{\partial x}(e^{i4x})$$

$$A\Psi_n(x)=i\,4e^{i4x}............(4)$$

بمقارنة معادلة (4) مع معادلة (3) نجد ان:

$$\Rightarrow a_n=i\,4$$ قيمة ذاتية (eigen value)

$$\Rightarrow \Psi_n(x)=e^{i4x}$$ دالة ذاتية (eigen function)

مثال/باستخدام معادلة القيمة الذاتية اثبت ان الدالة $\Psi_n(x)=\cos(4x)$ هي دالية ذاتية للمؤثر $\hat{A}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ؟

$$\hat{A}\Psi_n(x)=a_n\Psi_n(x)$$
$$\hat{A}\Psi_n(x)=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(4x)$$
$$\hat{A}\Psi_n(x)=+4\frac{\partial}{\partial x}\sin(4x)$$
$$\Rightarrow \hat{A}\Psi_n(x)=16\cos(4x)$$
$$\therefore a_n=16$$
$$\Psi_n(x)=\cos(4x)$$

H.W/ باستخدام معادلة القيمة الذاتية اثبت ان الدالة $\Psi_n(x)=\sin(6x)$ هي دالية ذاتية للمؤثر $\hat{A}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ؟

7-2- خواص المؤثرات (properties of operators)

أولاً:- الصفة الخطية (linear operator):

يقال المؤثر $\hat{A}$ مؤثرا خطيا اذا حقق الشروط التالية:

$$1-\hat{A}[\psi_1+\psi_2]=\hat{A}\psi_1+\hat{A}\psi_2$$

$$2-\hat{A}(a\psi)=a\hat{A}\psi$$ **حيث (a) ثابت**

ثانياً:- صفة التبادل (Commutation):

يعرف تبادل مؤثرين $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ كما يلي:

$$\hat{C}=[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$$

حيث ان $\hat{C}$ يسمى بالمؤثر المستبدل (Commutator operator)

الحالة الاولى: اذا كانت $\hat{C} = 0$

$$\hat{C} = 0 \Rightarrow [\hat{A},\hat{B}] = 0$$

$$\therefore \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

في مثل هذه الحالة يسمى المؤثرين متبادلين (Commute operator)

الحالة الثانية: اذا كانت $\hat{C} = 1$

هو مؤثر الذي يمتلك وحدة واحدة $\hat{C}$ = Unit operator

الحالة الثالثة: اذا كانت $\hat{C} \neq 0$

$$[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$$

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$$

$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ Not commutator operator

وهذه من اهم العلاقات في ميكانيكا الكم حيث نلاحظ او نقيس مقدارين فيزيائيين في آن واحد ، يكفي ان نثبت ان اقواس التبادل للمؤثرين يساوي صفر أو ان المؤثرين متبادلين ، واذا كان قوس التبادل لا يساوي صفر فذلك يعني اننا لا نستطيع قياس المقدارين الفيزيائيين في آن واحد حسب مبدأ اللادقة لهيزنبرك.

خواص اقواس التبادل

$$[\hat{A},\hat{B}]=-[\hat{B},\hat{A}]$$

$$[\hat{A},\hat{A}]=0$$

$$[\hat{A},\hat{B}]+[\hat{B},\hat{A}]=0$$

$$[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]+[\hat{A},\hat{C}]$$

$$[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{B},\hat{C}]$$

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$$

$$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}+\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]$$

$$[\hat{A}_1\hat{A}_2,\hat{B}_1\hat{B}_2]=\hat{B}_1[\hat{A}_1\hat{A}_2,\hat{B}_2]+[\hat{A}_1\hat{A}_2,\hat{B}_1]\hat{B}_2$$

$$[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]=0$$

$$[\hat{A},\hat{B}^n]=nB^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]$$

$$[\hat{A}^n,\hat{B}]=n\,\hat{A}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]$$

مثال/ اثبت ان المؤثر $[\frac{\partial}{\partial x}, x]$ هو مؤثر وحدة ؟

الحل/

$$\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$$

$$\hat{C} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

$$\because \hat{C} = [\frac{\partial}{\partial x}, x]$$

$$\therefore \hat{C} = \frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{\partial}{\partial x}$$

نضرب طرفي المعادلة ب $\psi(x)$

$$\hat{C}\psi(x) = \{\frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{\partial}{\partial x}\}\psi(x)$$

$$\hat{C}\psi(x) = \frac{\partial}{\partial x} x(\psi(x)) - x \frac{\partial}{\partial x}(\psi(x))$$

الاول في مشتقة الثاني + الثاني في مشتقة الاول

$$\hat{C}\psi(x) = \frac{\partial}{\partial x} x(\psi(x)) - x \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$$

$$\hat{C}\psi(x) = \psi(x) + \cancel{x \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}} - \cancel{x \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}}$$

$$\hat{C}\cancel{\psi(x)} = \cancel{\psi(x)}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 1$$

H.W/ اثبت انه $\hat{C}=[x,\frac{\partial}{\partial x}]=-1$ ؟

H.W/ اثبت انه $[\hat{x},\hat{p}_x]=i\hbar$ ؟

H.W/ اثبت انه $[\hat{p}_x,\hat{x}]=-i\hbar$ ؟

ثالثاً:- المؤثر الهيرميتي (Hermitian operator):

المؤثر الهيرميتي:- هو مؤثر يمثل كمية فيزيائية قيمته الذاتية حقيقة ويحقق الشرط الرياضي التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*\hat{A}\psi_m d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(\hat{A}\psi_n)^*d\tau \quad \text{..................} \ (1)$$

لماذا نستخدم الهيرمتي ؟ وذلك لان قيمته الذاتية حقيقية

(*): المرافق العددي (conjugate)(يقوم بتغيير اشارة العدد التخيلي فقط)

للمؤثر الهيرمتي صفتين مهمتين جدا هما:

1- القيمة الذاتية المقابلة للمؤثرات الهيرمتيه حقيقية أي ان $a_n=a_n^*$

2- الدوال الذاتية المقابلة لقيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة أي ان $\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\psi d\tau=0$

8-2- القيمة المتوقعة (The Expectation Value):

اذا كان النظام في الحالة الكمية (ψ) والتي هي دالة غير ذاتيه للمؤثر ($\hat{A}$) فانه لا يمكن التنبؤ بنتيجة عملية القياس للكمية الملاحظة A . ولذلك ولإيجاد قيمة الكمية الملاحظة A في مثل هذه الحالة يجب ان نستخدم معدل القيمة $\langle A \rangle = \bar{A}$ والذي يسمى في ميكانيك الكم بالقيمة المتوقعة والذي يمثل رياضيا بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\langle A \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A} \psi dv}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dv} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وإذا كانت الدالة ψ منظمة(معايرة)فان التكامل في المقام يساوي الواحد فعندها تصبح معادلة القيمة المتوقعة بالشكل التالي :

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A} \psi dv \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

يمكن ان نعبر عن قيم المتوقعة للموقع والزخم والطاقة الكلية وللطاقة الحركية كما يلي:

1) القيمة المتوقعة للموقع (Position) هي:

$$\langle x \rangle = \int \psi^* \hat{x} \psi dx$$

2) القيمة المتوقعة للزخم(Momentum) هي:

$$\langle p_x \rangle = \int \psi^* \hat{p}_x \psi dx$$

$$\because \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\therefore \langle p_x \rangle = -i\hbar \int \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi dx$$

3) القيمة المتوقعة للطاقة الكلية (Total energy) هي:

$$\langle E \rangle = \int \psi^* \hat{E} \psi dx$$

$$\because \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\therefore \langle E \rangle = i\hbar \int \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi dx$$

3) القيمة المتوقعة للطاقة الحركية(Kinetic energy)هي:

$$\langle T \rangle = \int \psi^* \hat{T} \psi dx$$

$$\because \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

$$\because \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\therefore \hat{T} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\therefore \langle T \rangle = \frac{-\hbar^2}{2m} \int \psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi dx$$

مثال/ اذا كانت الدالة الموجية $\psi(x)$ تمثل حركة جسيم في المحور السيني حيث :

$0 < x < 1$ و $\psi = x\sqrt{3}$ وفي مكان آخر $\psi = 0$.

1- ما هو احتمال وجود الجسيم في الحيز (0,0.5)

2- ما هو موقع الجسيم ؟

<u>الحل:</u>

(1) يمكن حساب احتمالية تواجد الجسيم من العلاقة : $\int_0^{0.5} \psi^* \psi dx$

وبما انه الدالة حقيقية (أي انها لا تحتوي على i) : $\psi^* = \psi = x\sqrt{3}$

$$\therefore \int_0^{0.5} 3x^2 dx = \left[3\frac{x^3}{3}\right]_0^{0.5} = (0.5)^3 = 0.125 = \frac{1}{8}$$

(2) موقع الجسيم :

$$\langle x \rangle = \int_0^1 \psi^* x \psi dx$$

$$\langle x \rangle = \int_0^1 3x^2 x\, dx = \int_0^1 3x^3 dx = \left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

مثال: يتحرك جسيم بدالة موجة $\psi(x) = Ae^{ix^2}$ في الفترة [0,0.5] جد :

(1) ثابت العيارية A

(2) القيمة المتوقعة للموقع وللزخم الخطي

(3) القيمة المتوقعة للطاقة الحركية

الحل:

(1)

$$\int \psi^*(x)\psi(x)\,\mathrm{dx} = 1$$ ....شرط الدالة العيارية

$$\int_0^{0.5} A^* e^{-ix^2} A e^{ix^2} dx = 1$$

$$\left|A^2\right| \int_0^{0.5} dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2}$$

(2)

$$\langle x \rangle = \int \psi^* x \psi dx = \int_0^{0.5} \sqrt{2} e^{-ix^2} x \sqrt{2} e^{ix^2} dx = 2\int_0^{0.5} x dx = \frac{1}{4}$$

$$\langle p_x \rangle = \int \psi^* p_x \psi dx = \int_0^{0.5} \sqrt{2} e^{-ix^2} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \sqrt{2} e^{ix^2} dx$$

$$= -2i\hbar \int_0^{0.5} e^{-ix^2} (2ix) e^{ix^2} dx = 4\hbar \int_0^{0.5} x dx = \frac{1}{2}\hbar$$

(3): H.W