محاضرة رقم 12	
الكلية	كلية التربية الأساسية حديثة
القسم	معلم الصفوف الاولى
المادة باللغة الانجليزية	Mathematics
المادة باللغة العربية	الرياضيات
المرحلة	الاولى
اسم التدريسي	أنور احمد صالح
عنوان المحاضرة باللغة الانجليزية	**Matrices**
عنوان المحاضرة باللغة العربية	المصفوفات
رقم المحاضرة	الثاني عشر
المصادر والمراجع	مدخل الى المنطق الرياضي (الأخضر قريسي)
	المصفوفات النظرية والتطبيق / مجدي الطويل
	كتاب التفاضل والتكامل / دكتور رمضان واحمد عبد العال

المصفوفات

المصفوفة A من الصنف $(m \times n)$ هي ترتيبه مستطيلة تحتوي $m \times n$ من الاعداد الحقيقية (او العقدية) مرتبة على شكل مصفوفة افقية عددها m واعمدة راسية عددها n تمثل نظاما خطيا ل m من المعادلات وn من المجاهيل

m= صفوف

n= أعمدة

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

ان الصف i في المصفوفة A هو

$$[a_{ia} \quad a_{22}\ldots\ldots a_{in}]$$

$$1 \leq i \leq n$$

والعمود j في المصفوفة A هو $\begin{bmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

$1 \leq j \leq m$

فاذا كان $m=n$ فيقال بأن A هي مصفوفة مربعة رتبتها $n \times n$ وتشكل الاعداد $a_{11}, a_{22}, \ldots.., a_{nn}$ القطر الرئيسي لA

ونشير الى العدد a_{ij} الذي يقع في الصف رقم i والعمود رقم j في المصفوفة A بالعنصر رقم (i,j) للمصفوفة A ويكتب بالصيغة التالية

$A=[a_{ij}]$

امثلة لمصفوفات مختلفة

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2 ×3)

ان A مصفوفة من الصنف (3× 2) فيها $a_{12}=2$, $a_{22}=0$, $a_{23}=1$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

(2 ×2)

مصفوفة مربعة m = n وهي مصفوفة من نوع (2× 2) فيها $b_{21}=2$, $b_{12}=$, 4 , $b_{11}=1$

$$C=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(3 ×1)

هي مصفوفة من صنف (1× 3) فيها $c_{11}=1$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(3 ×3)

هي مصفوفة من صنف (3× 3) مربعة ايضا

$$A=[\,3\,]$$

(1 ×1)

هي مصفوفة من صنف (1 ×1)

$$F=[\,-1 \quad 0 \quad 2\,]$$

(1 ×3)

هي مصفوفة من صنف (3× 1)

* المصفوفة الصفرية هي التي يكون جميع عناصرها اصفار

$$K=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة صفرية رتبتها (3× 2)

المصفوفة القطرية هي مصفوفة مربعة التي يكون جميع عناصرها اصفار ما عدا القطر الرئيسي

$$S=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

مصفوفة قطرية رتبتها (3× 2)

مصفوفة الوحدة او المصفوفة المحايدة التي يكون جميع عناصرها اصفار ما عدا القطر الرئيسي يساوي واحد ويرمز لها بالرمز I_n حيث n تمثل عدد صفوف المصفوفة (رتبتها)

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جمع وطرح المصفوفات

اذا كان كل من $A=[a\ ij]$, و $B=[b\ ij]$ مصفوفة من صف (m ×n) (أي ان المصفوفتان متساويتان بالأعمدة والصفوف) فان حاصل جمع B ,A هو المصفوفة $C=[\ c\ ij]$ المعرفة بالصيغة التالية

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1\leq i \leq m\ ,\ 1 \leq j \leq n)$$

اي اننا حصلنا على c بواسطة جمع العناصر المتناظرة من A,B

كذلك فان حاصل طرح B من A هو المصفوفة $D=[\ d\ ij]$

المعرفة بالصيغة التالية

$$D\ ij = a_{i}j - b_{i}j \quad (1\leq i \leq m\ ,\ 1 \leq j \leq n)$$

أي اننا حصلنا على D بواسطة طرح العناصر المتناظرة في B من A وليس العكس أي ان

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

مثال

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2 \times 3) \qquad\qquad (2 \times 3)$$

جد A + B , A – B

الحل:

بما ان عدد (m ×n) متساوي في المصفوفتان اذا ممكن اجراء عملية الجمع والطرح

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 4-4 \\ 2+1 & -1+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 1-0 & -2-(2) & 4-(-4) \\ 2-1 & -1-3 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

اذا كانت $A=[a_{i}j]$ مصفوفة من الصف $(m \times P)$ و $B=[b_{i}j]$ مصفوفة من الصف $(p \times n)$ فان حاصل ضرب المصفوفة A والمصفوفة B هو المصفوفة $C=[c_{ij}]$ من الصنف $(m \times n)$

والمعرفة بالصيغة

$$[cij = a_{i1}\ b_{ij} + a_{i2} b_{2j} + \dots\dots + a_{ip}\ b_{pj}]$$

حيث $(1 \leq i \leq m\ ,\ 1 \leq j \leq n)$

وتبين مما تقدم ان كل عنصر من عناصر $C=(i,j)$ في مصفوفة الضرب يحسب بواسطة

جمع (الضرب لكل عنصر من الصف i من المصفوفة A بالعنصر المناظر في العمود j من المصفوفة B

وعلية يمكن ضرب المصفوفتين A, B اذا كانت عدد الاعمدة للمصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف للمصفوفة الثانية .

والمصفوفة الناتجة من ضرب المصفوفتين عدد صفوفها مساوي للمصفوفة الأولى

وعدد اعمدتها مساوي لعدد أعمدة المصفوفة الثانية .

مثال / لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(2×3) (3×2)

الصفوف تساوي الاعمدة

رتبة المصفوفة الجديدة (2×2)

جد $[A\,.\,B]$

$$A\,.\,B=\begin{bmatrix} (1)(-2)+(2)(4)+(-1)(2) & (1)(5)+(2)(-3)+(-1)(1) \\ (3)(-2)+(1)(4)+(4)(2) & (3)(5)+(1)(-3)+(4)(1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

(2×2)

مثال/ اثبت $AB \neq B\,A$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2×2) (2×2)

الحل

$$AB=\begin{bmatrix} (1)(2)+(2)(0) & (1)(1)+(2)(1) \\ (-1)(2)+(3)(0) & (-1)(1)+(3)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2×2) (2×2)

$$BA=\begin{bmatrix} (1)(2)+(1)(-1) & (2)(2)+(1)(3) \\ (0)(1)+(1)(-1) & (0)(2)+(1)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2×2) (2×2)

وعلية فأن $AB \neq B\,A$

ضرب المصفوفة بثابت . اذا ضربت المصفوفة بثابت معين C فأن جميع عناصر المصفوفة تضرب بهذا الثابت

مثال . اذ كان لدينا المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{جد} \quad 2A$$

الحل/

$$2A=\begin{bmatrix} 2(3) & 2(-2) \\ 2(0) & 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال / جد $3.I_2$

الحل . $= 3\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3(1) & 3(0)\\3(0) & 3(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$

منقول المصفوفة

تسمى المصفوفة ذات الدرجة m ×n الناتجة عن المبادلة بين الصفوف والأعمدة للمصفوفة A ذات الدرجة n ×m منقول المصفوفة A ويرمز لها بالرمز : A^T.

مثال . لتكن

$$A = \begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\0 & 5 & -2\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}6 & 2 & -4\\3 & -1 & 2\\0 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix}5 & 4\\-3 & 2\\2 & -3\end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix}3 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$$

جد منقول المصفوفة لكل من هذه المصفوفات

$$A^T = \begin{bmatrix}4 & 0\\-2 & 5\\3 & -2\end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix}6 & 3 & 0\\2 & -1 & 4\\-4 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix}5 & -3 & 2\\4 & 2 & -3\end{bmatrix} \qquad D^T = \begin{bmatrix}3\\-5\\1\end{bmatrix}$$

$$E^T = \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}$$