كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الثانية

أستاذ المادة : د.فراس شاكر فندي

اسم المادة باللغة العربية: النظرية الزمر

اسم المادة باللغة الإنكليزية: Groups Theorem

اسم المحاضرة التاسعة باللغة العربية: ضرب الزمر الجزئية

اسم المحاضرة التاسعة باللغة الإنكليزية : Product of Subgroups

Definition: Let $(G,*)$ be a group and $(H,*)$, $(K,*)$ be two subgroups of G, then the product of H & K is the set

$$H*K=\{a*b : a\in H \wedge b\in K\}$$

ملاحظات

* $H^2 = H*H$
* $(H\cup K) \subseteq H*K$
③ $H*K \neq \phi$
④ $(H*K)\subseteq G$

Theorem: Let $(G,*)$ be a group and $(H,*),(K,*)$ are two subgroups of $(G,*)$, then

① $H \subseteq H*K$ & $K \subseteq H*K$

② If $(G,*)$ is commutative group, then $(H*K)\leq G$.

③ $(H*K,*)$ is a subgroup of $(G,*)$ iff $H*K=K*H$

proof:

① T.P $H \subseteq H*K$

Let $x\in H \Rightarrow x\in H \wedge e\in K$

$\Rightarrow (x*e)\in (H*K)$

$\Rightarrow x\in (H*K)$

$\therefore H\subseteq (H*K)$

T.P $K \subseteq H*K$

Let $y\in K$

$\Rightarrow e\in H \wedge y\in K$

$\Rightarrow (e*y)\in H*K$

$\Rightarrow y\in (H*K)$

$\therefore K\subseteq (H*K)$

---

② Let G is abelian. T.P $(H*K) \leq G$

① $e \in H \wedge e \in K \Rightarrow e*e \in (H*K)$
$\Rightarrow e \in (H*K)$

$\therefore H*K \neq \phi$ and $H*K \subseteq G$

② Let $x, y \in H*K \Rightarrow x = a*b$, $a \in H \wedge b \in K$
$\Rightarrow y = c*d$, $c \in H \wedge d \in K$

$$x*y^{-1} = (a*b)*(c*d)^{-1}$$
$$= (a*b)*(c^{-1}*d^{-1}) \quad (G \text{ is abelian})$$
$$= a*(b*c^{-1})*d^{-1}$$
$$= a*(c^{-1}*b)*d^{-1} \quad (G \text{ is abelian})$$
$$= \underset{\in H}{(a*c^{-1})}*\underset{\in K}{(b*d^{-1})}$$

* يعتبر $(a*c^{-1})$ عنصر واحد ينتمي الى H
وكذلك $(b*d^{-1})$ عنصر واحد ينتمي الى K

$\therefore x*y^{-1} \in H*K$.

$(H*K) \leq G$

==================================

④ $\Rightarrow$ Let $(H*K) \leq G$ T.P $H*K = K*H$

Let $x \in H*K \Rightarrow x^{-1} \in H*K$ $(H*K \leq G)$

$\therefore x^{-1} = (a*b)$, $a \in H$, $b \in K$

$x = (x^{-1})^{-1} = (a*b)^{-1} = \underset{\in K}{b^{-1}} * \underset{\in H}{a^{-1}} \in K*H \Rightarrow x \in K*H$

$(H*K) \subseteq (K*H)$ — ①

Let $y \in K*H \Rightarrow y = k*h$, $k \in K \wedge h \in H$

$y^{-1} = (k*h)^{-1} = h^{-1}*k^{-1} \in H*K$

بـ HK هي زمرة جزئية لذلك كل عنصر ينتمي في HK ويجب ان يكون نظيره ايضا ينتمي

$\therefore y^{-1} \in H*K \Rightarrow y \in H*K$ $(H*K \leq G)$

$K*H \subseteq H*K$ —②

from ① and ② we get

$$H*K = K*H$$

الأتجاه الثاني

$\Leftarrow$ Let $H*K = K*H$

① Let $e \in H \wedge e \in K \Rightarrow e*e \in H*K$

$\Rightarrow e \in H*K$

$\therefore H*K \neq \phi$ & $H*K \subseteq G$

② Let $x, y \in H*K \Rightarrow x = h_1*k_1 \ , \ y = h_2*k_2$

$$x*y^{-1} = (h_1*k_1)*(h_2*k_2)^{-1}$$
$$= (h_1*k_1)*(k_2^{-1}*h_2^{-1})$$
$$= h_1*(k_1*k_2^{-1})*h_2^{-1}$$
$$= h_1*(k_3*h_2^{-1}) \quad [k_3 = (k_1*k_2^{-1}) \in K]$$
$$= h_1*(h_3*k_4) \quad (k_3*h_2^{-1} \in K*H = H*K)$$
$$= (h_1*h_3)*k_4 \quad (k_3*h_2^{-1} = h_3*k_4 \in H*K)$$
$$= h_4*k_4 \in H*K \quad (h_4 = h_1*h_3 \in H)$$

$\therefore x*y^{-1} \in H*K$

$\therefore H*K \leqslant G$.