الجامعة	الانبار
الكلية	العلوم
القسم	الرياضيات
المرحلة	الرابعة
اسم المادة باللغة العربية	التحليل العقدي
اسم المادة باللغة الانكليزية	Complex Analysis
اسم التدريسي	دكتورة دنيا علاوي جروان
عنوان المحاضرة باللغة العربية	متسلسلة لورنت
عنوان المحاضرة باللغة الإنكليزية	Laurent Series
رقم المحاضرة	L10

Laurent's series متسلسلة لورانت

سوف ندرس امكانية إيجاد مفكوك دالة ذات نمط أعم من سلاسل القوى وسلسلة تايلور والتي تحتوي على قوى صحيحة موجبة وسالبة لـ $(z-z_0)$ تسمى هذه السلسلة لورانت وصيغتها

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , n=0,\mp 1,\mp 2,\ldots$$

such that $\quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{n+1}}$

$$c: \quad 0<|z-z_0|<r_1$$

ويمكن كتابتها بالصيغة

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{analytic part}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}}_{\text{principle part}}$$

and $\quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int f(s)(s-z_0)^{n-1}\,ds$

ملاحظة: إذا كان لدالة ما نقطة منفردة معزولة z_0 فإن تلك الدالة تتمثل بسلسلة لورانت.

Ex// The series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$ is Laurent series.

since $\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \underbrace{z^{-1}}_{\text{principle part}} + \underbrace{z^0 + z + z^2 + z^3 + \ldots}_{\text{analytic part}}$

Example: Find Laurent series for the function $\frac{e^z - 1}{z}$ at $z_0 = 0$

Sol

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

since $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

So

$$f(z) = \frac{\left(\cancel{1} + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) - \cancel{1}}{z}$$

$$= 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

Example: Find the Laurent series for

$f(z) = \frac{z - \cos z}{z}$ at $z_0 = 0$

Sol: $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} z^{2n}/(2n)!$

$$f(z) = \frac{z - \left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right]}{z}$$

$$= \frac{z - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots}{z}$$

$$= 1 - \frac{1}{z} + \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \cdots$$

So $\frac{z - \cos z}{z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} + \cdots$

Example Find Laurent series for $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$

Sol :-

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z+2)}$$

$$\Rightarrow A = 1 , B = 1$$

Hence

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

when $|z| > 1 \longrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \cdots$$

when $|z| \leq 2$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \cdots\right)$$

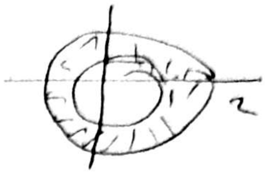
$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \cdots$$

$\therefore$

$$\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} \cdots\right)$$

$$= \cdots - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \cdots$$

Example 1- Expland the function $f(x) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ in the form of Laurent's series in the ring $1<|z|<2$



Sol

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

since

$$\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)} = \frac{(A+B)z + (-2A-B)}{(z-1)(z-2)}$$

$\therefore A+B=0 \Rightarrow A=-B$ and

$$-2A-B=-1$$
$$-2(-B)-B=-1$$
$$2B-B=-1$$
$$B=-1$$

So $$\frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

$\forall \; |z|>1$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$$

$\forall \; |z|<2$

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots \left(\frac{z}{2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Ex%. If $f(z) = \dfrac{\ln(z)}{(z-1)^5}$, find Laurent series for $f(z)$.

Sol $z-1=0 \Rightarrow z=1$ singular point

$\ln(z)$ has Taylor series at $z=1$

$$\ln(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad \text{at } z=0$$

at $z=1$

$$\ln z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$\therefore f(z) = \frac{\ln(z)}{(z-1)^5} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}}{(z-1)^5}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1-5}}{(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{n-4}}{n+1}$$